الرياضيات

الصف العاشر - دليل المُعلِّم

الفصل الدراسي الأول

10

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

يوسف سليمان جرادات   نور محمد حسان   إبراهيم عقلة القادري

نقين أحمد جوهر (منسقًا)

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الدليل عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237   06-5376266   P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor   feedback@nccd.gov.jo   www.nccd.gov.jo

قـررت وزارة التربيـة والتعليـم اسـتخدام هـذا الدليـل في مـدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاء على قـرار المجلس الأعـلى للمركز الوطنـي لتطوير المناهـج في جلسـته رقـم (2020/6)، تاريـخ 2020/9/24 م، وقـرار مجلـس التربيـة والتعليـم رقـم (2020/132) تاريـخ 2020/11/14 م بـدءًا مـن العـام الـدراسي 2020 / 2021 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 122 - 3

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2020/10/4564)

373.19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

دليل المعلم: الرياضيات: الصف العاشر/ المركز الوطني لتطوير المناهج.- عمان: المركز، 2020

ج1 (212) ص.

ر.إ.: 2020/10/4564

الواصفات: / تدريس الرياضيات / / المقررات الدراسية/ / التعليم الاعدادي/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية)

1444 هـ / 2023 م

المقدمة

يسرُّ المركز الوطني لتطوير المناهج أنْ يُقدِّم للمُعلِّمين والمُعلِّمات هذه الطبعة من دليل المُعلِّم للصف العاشر، آملًا أنْ تكون لهم مُرشِــدًا وداعمًا في تدريس الطلبة وتقويمهم، بما يُحقِّق الأهداف المنشــودة من تدريس كتب الرياضيات المُطوَّرة.

يحتوي دليل المُعلِّم على جميع المصادر التي تَلزم المُعلِّم/ المُعلِّمة، بَدْءًا بالنسخ المُصغَّرة من كتابي الطالب والتماريــن، وانتهاءً بإجابات ما ورد فيهما من تدريبات ومســائل؛ ما يُغْني عن حمل هذيــن الكتابين إلى الغرفة الصفية. وكذلك يحتوي الدليل على جميع أوراق المصادر المشار إليها في الدروس، ويُمكِن للمُعلِّم/ للمُعلِّمة تصوير نســخ منها للطلبة؛ ما يُوفِّر عليهما جُهْد إعداد هذه الأوراق. استُهِلَّ الدليل بالصفحات التي تحمل عنوان «أهلًا بك في مناهج الرياضيات المُطوَّرة »، وتعرض العناصر الرئيسة في كلٍّ من كتابي الطالب والتمارين ودليل المُعلِّم، وتُبيِّن النهج المُعتمَد في كلٍّ منها بطريقة مُبسَّطة؛ لذا يجدر بالمُعلِّم/ المُعلِّمة قراءة هذه الصفحات بِتَرَوٍّ وتدبُّرٍ قبل البَدْء باستعمال الدليل.

روعي في إعداد الدليل تقديم خطة واضحة لسير الدرس، بَدْءًا بمرحلة التمهيد، ومرورًا بمراحل الاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، وانتهاءً بمرحلة الختام، إلى جانب إرشــادات تســاعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على التخطيــط الزمني للمهام في كل مرحلــة، وتوظيف مختلف أدوات التدريس والتقويــم التي يتضمَّنها المنهاج المُطوَّر، فضلًا عن الأخطاء المفاهيمة الشائعة والإرشادات للمعلمين/ للمعلمات حول كيفية معالجتها.

يُقــدِّم الدليل أيضًا مقترحات لتنويع التعليم تســاعد المُعلِّم/ المُعلِّمة علــى التعامل مع الطلبة كافةً، على اختلاف مستوياتهم الدراسية وأنماط تعلُّمهم؛ انسجامًا مع الاتجاهات الحديثة في تعلُّم الرياضيات وتعليمها. ولأنَّ الموضوعات الرياضية بعضها مبني على بعض؛ فقد قدَّم الدليل نتاجات التعلُّم الســابق ونتاجات التعلُّم اللاحق في بداية كل وحدة، فضلًا عن أدوات تشخيص ومعالجة مناسبة، تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على معالجة الضعف لدى الطلبة، وتهيئتهم للتعلُّم الحالي. يضاف إلى ذلك أنَّ تعرُّف المُعلِّم/ المُعلِّمة جميع الموضوعات الرياضية التي سوف يدرسها الطلبة في صفوف لاحقة (التعلُّم اللاحق) يُوفِّر له/ لها تصوُّرًا كافيًا عنها، ويجعل تخطيط الدروس أكثر دِقَّةً.

ونحــن إذ نُقدِّم هذا الدليل، فإنّا نُؤمِّل أنْ ينال إعجاب زملائنا وزميلاتنا من المُعلِّمين والمُعلِّمات ويكون خير معين لهم/ لهنّ، ويجعل تعليم الرياضيات أكثر متعةً وسهولةً.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

أهلًا بك

في مناهج الرياضيات المُطوَّرة

عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة، يسرُّنا في هذه المُقدِّمة أنْ نُبيِّن الأسس العلمية والتربوية التي قامت عليها مناهج الرياضيات المُطوَّرة بطريقة مُبسَّطة، وذلك بعرض بعض العناصر من كتاب الطالب، وكتاب التمارين، ودليل المُعلِّم، التي تتجلّى فيها تلك الجوانب العلمية والتربوية بوضوح. ونحن إذ نعرض هذه المُقدِّمة فإنّا نأمل أنْ تكون مُعينةً على فهم كيفية استعمال المناهج المُطوَّرة، وتوظيفها بصورة صحيحة داخل غرفة الصف، بما يُحقِّق الفائدة المنشودة منها.

تتناول المُقدِّمة الجوانب الآتية:

1. خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات.
2. أنواع التقويم وأدواته.
3. تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها.
4. بعض استراتيجيات التعلُّم:
   - التعلُّم القائم على المشاريع.
   - التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.
5. مهارات التفكير العليا.
6. الوصول إلى الطلبة كافةً.

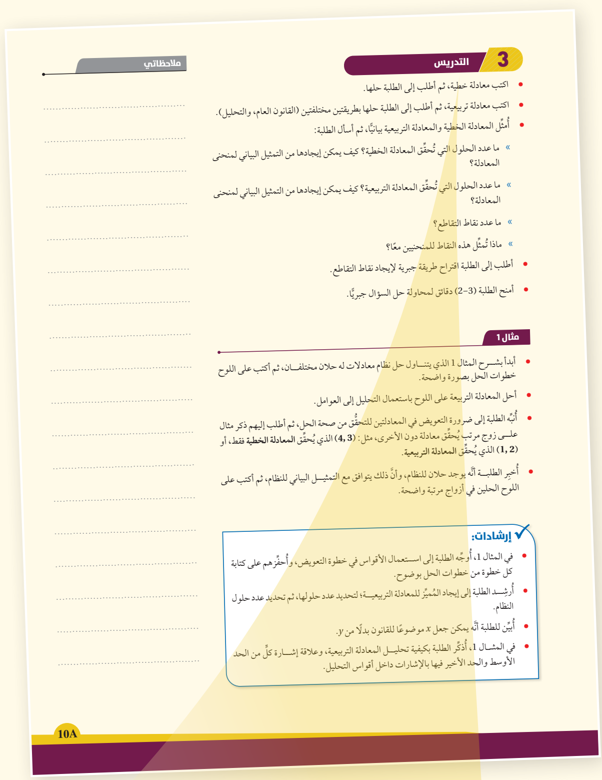
وفي نهاية هذه المقدمة بعض استراتيجيات التدريس الشائعة؛ لتكون مرجعًا، ومُعينةً عند التخطيط لتقديم الدروس.

1 خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات:

يُقدِّم هذا الدليل خطة واضحة لسير الدرس، تحوي ست خطوات (مراحل)، هي: التهيئة، والاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، والختام. وتتضمَّن كل خطوة من هذه الخطوات مقترحات وإرشادات تساعد على تقديم الدرس بنجاح.

1 التهيئة

تهدف هذه المرحلة إلى تهيئة الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون ذكر لأيٍّ من أفكاره، وتوجد في هذا الدليل مقترحات تعين على تقديم التهيئة بنجاح في بند (التهيئة). قد يحوي هذا البند نشاطًا مبنيًّا على معرفة الطلبة السابقة؛ لذا يمكن في أثناء هذه المرحلة رصد بعض الأخطاء المفاهيمية وتصحيحها قبل بدء الدرس.



2 الاستكشاف

تهدف هذه المرحلة إلى إثارة فضول الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون تقديم معلومات جاهزة لهم؛ إذ يتعيَّن عليك في هذه المرحلة أداء دور تيسير التعلّم، وذلك بتوجيه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم) من كتاب الطالب، ومنحهم وقتًا كافيًا لدراستها والتفكير فيها، ثم الطلب إليهم الإجابة عن الأسئلة المقترحة في بند (الاستكشاف) من هذا الدليل. ليس شرطًا أنْ يتمكّن الطلبة من الإجابة عن هذه الأسئلة بصورة صحيحة؛ لذا عليك تقبّل الإجابات، ثم النظر فيها لاحقًا بعد انتهاء الدرس، والتأكد من صحتها، علمًا بأنَّ تمارين بعض الدروس تُحيل الطلبة إلى المسألة في بند (مسألة اليوم)؛ لحلها في نهاية الدرس.

3 التدريس

من المُتوقَّع أنْ تؤدي مرحلة (الاستكشاف) إلى حدوث حالة من عدم التوازن في المفاهيم لدى الطلبة، فتبدأ مرحلة (التعلُّم) في إعادة التوازن لديهم، للتمكن من تكوين خبرات مشتركة مُحدَّدة تساعد على إدراك المفاهيم، وإتقان العمليات والمهارات. تستغرق هذه المرحلة كثيرًا من وقت الدرس؛ فهي تشمل تقديم فقرات الشرح، وأمثلة الدرس جميعها؛ لذا يتعيَّن الاستعانة بالإرشادات الواردة في بند (التدريس) من هذا الدليل؛ للتمكّن من تنفيذ هذه المرحلة المهمة بنجاح.

4 التدريب

فـي هذه المرحلــة يتدرَّب الطلبــة على أنواع مختلفة من المسائل المجرَّدة والحياتية في بند (أتدرَّب وأحُلُّ المسائل) وبند (مهارات التفكير العليا) داخل غرفة الصف؛ لترســيخ المفاهيم الجديدة، وزيــادة الطلاقة الإجرائية لديهم. قد يُكمِل الطلبة هذه المرحلة في المنزل. وكذلك التدريبــات والمســائل الواردة فــي الصفحة المقابلة للدرس في كتاب التمارين.

5 الإثراء

تُعَدُّ توســعة المفاهيم والعمليات والمهارات الهدف الأســاس لهذه المرحلة، ويتمثَّل ذلك في إشــراك الطلبــة في مهام تتضمَّــن مفاهيم وعمليات أوســع وأكثــر عمقًــا. تُوفِّر مناهج الرياضيات المُطوَّرة مصادر عِدَّة لإثراء الطلبة ذوي المستوى فوق المُتوسِّط، منها بند الإثراء في هذا الدليل، الذي يحوي مســألةً، أو نشاطًا صفيًّا، أو نشاطًا حاســوبيًّا، إضافةً إلى مشروع الوحدة الــذي يثري معرفة الطلبة بموضوعات الوحدة.

6 الختام

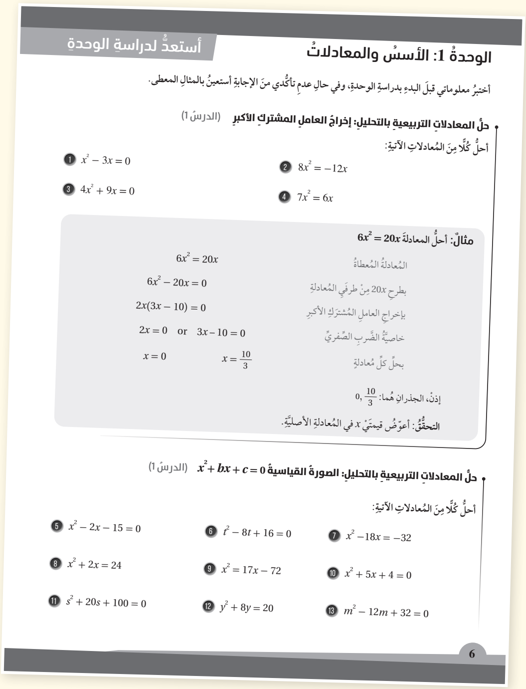
هـي المرحلـة الأخيرة مـن مراحل تقديـم الدرس، وتهـدف إلى تجميع الأفـكار المختلفـة التـي تضمَّنها الدرس، ثـم عرضها بصـورة مترابطة، فضـلًا عن اشـتمالها على مقترحات تسـاعد علـى تقديم هـذه المرحلة بنجاح.

2 أنواع التقويم وأدواته:

التقويم جزء لا يتجزَّأ من عملية التعلُّم؛ فهو يُواكِب جميع خطواتها، ويضمن اســتمرارها وصولًا إلى تحقيق الهدف. يُعرَّف التقويم بأنَّه عملية تُستعمَل فيها معلومات من مصادر مُتعدِّدة للوصول إلى حكم عن تحصيل الطلبة الدراســي. وقد أبرزت مناهج الرياضيات المُطوَّرة ثلاثة أنواع مختلفة من التقويم، هي: **التقويم القبلي، والتقويم التكويني، والتقويم الختامي**.

أ التقويم القبلي:

يهدف هذا النوع من التقويم إلى تحديد مدى امتلاك الطلبة المعرفةَ السابقة اللازمة لدراسة الموضوع الجديد؛ ما يساعد على تحديد ما يَلزم الطلبة من معالجات تتمثَّل في مصادر التعلُّــم الإضافية. تحتوي مناهج الرياضيات المُطوَّرة على أداة تقويم قبلي في بداية كل وحدة، وهي موجودة في كتاب التمارين بعنوان (أستعد لدراسة الوحدة).


الوحدةُ 1: الأسسُ والمعادلاتُ — أستعدُّ لدراسة الوحدة

اختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمثالِ المعطى.

حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ: إخراجُ العاملِ المشتركِ الأكبرِ (الدرس 1)

أحلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2-3x=0$ 2 $8x^2=-12x$
3 $4x^2+9x=0$ 4 $7x^2=6x$

مثالٌ: أحلُّ المعادلةَ $6x^2=20x$

$6x^2=20x$ المعادلةُ المُعطاةُ
$6x^2-20x=0$ بطرحِ $20x$ منْ طرفَي المعادلةِ
$2x(3x-10)=0$ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ
$2x=0$ or $3x-10=0$ خاصيةُ الضربِ الصفريِّ
$x=0$ $x=\frac{10}{3}$ بحلِّ كلِّ معادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, \frac{10}{3}$

التحقُّقُ: أعوِّضُ قيمتَيْ x في المعادلةِ الأصليةِ.

حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ: الصورةُ القياسيةُ $x^2+bx+c=0$ (الدرس 1)

أحلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

5 $x^2-2x-15=0$ 6 $t^2-8t+16=0$ 7 $x^2-18x=-32$
8 $x^2+2x=24$ 9 $x^2=17x-72$ 10 $x^2+5x+4=0$
11 $s^2+20s+100=0$ 12 $y^2+8y=20$ 13 $m^2-12m+32=0$

6

ب التقويم التكويني:

يحـدث هـذا النـوع مـن التقويـم فـي أثنـاء عمليـة التدريـس، ويهـدف إلـى متابعـة تعلُّـم الطلبـة أوَّلًا بـأوَّل، والتأكُّـد أنَّ العمليـة التعليميـة التعلُّمية تسـير فـي اتجـاه تحقيـق أهدافهـا المنشـودة، وأنَّـه لا يوجـد انحـراف عـن مسـارها؛ مـا يسـاعد علـى اتخـاذ القـرارات الصحيحـة، مثـل: الاسـتمرار فـي عمليـة التدريـس، أو التعديـل عليهـا، أو النظر فيهـا مـن جديـد. مـن أدوات التقويـم التكوينـي: الأسـئلة الشـفوية، والملاحظـات غيـر الرسـمية، والاختبـارات القصيـرة.

تحتــوي مناهج الرياضيات المُطوَّرة على أدوات للتقويم التكويني في كل درس، تتمثَّل في مسائل بند (أتحقَّق من فهمي) التي تلي كل مثال.


الوحدة 1

الخطوة 3 أحلُّ المعادلة الناتجة باستعمال التحليل:

$(x+1)(x-2)=0$ بالتحليل
$x+1=0$ or $x-2=0$ خاصيةُ الضرب الصفري
$x=-1$ or $x=2$ بحلِّ المعادلتين

الخطوة 4 أعوِّض قيمة x لإيجاد قيمة y:

الحالة الأولى: عندما $x=-1$:

$y=x-1$
$y=-1-1=-2$ بتعويض $x=-1$ في المعادلة الخطية

الحلُّ الأوَّل: $(x, y)=(-1, -2)$.

للتحقُّق من صحة الحلِّ الأوَّل، أعوِّض الزوج المرتَّب $(-1, -2)$ في كلٍّ من المعادلة الخطية والتربيعية:

$x-y=-1-(-2)=1$ ✓ بالتعويض في المعادلة الخطية
$x^2+y^2=(-1)^2+(-2)^2=1+4=5$ ✓ بالتعويض في المعادلة التربيعية

الحالة الثانية: عندما $x=2$:

$y=2-1=1$ بتعويض $x=2$ في المعادلة الخطية

الحلُّ الثاني: $(x, y)=(2, 1)$.

للتحقُّق من صحة الحلِّ الثاني، أعوِّض الزوج المرتَّب $(2, 1)$ في كلٍّ من المعادلة الخطية والتربيعية:

$x-y=2-1=1$ ✓ بالتعويض في المعادلة الخطية
$x^2+y^2=(2)^2+(1)^2=4+1=5$ ✓ بالتعويض في المعادلة التربيعية

أتذكَّر: توجدُ طرائقُ عِدَّةٌ لحلِّ معادلة تربيعية، منها: التحليل إلى العوامل، والقانون العام.

إرشاد: يجبُ تعويض الحلِّ في كلتا المعادلتين؛ لأنَّه قد يكون الحلُّ غير صحيح، بحيث يُحقِّق إحدى المعادلتين من دون الأخرى.

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:
$2x+y=12$
$y=x^2+5x-6$

يوجدُ حلّان لنظام المعادلات في المثال السابق. ولكن، هل يوجدُ نظامُ معادلاتٍ لهُ حلٌّ واحدٌ؟ لمعرفة الإجابة، أدرسُ المثال الآتي.

11

أتحقَّق من فهمي

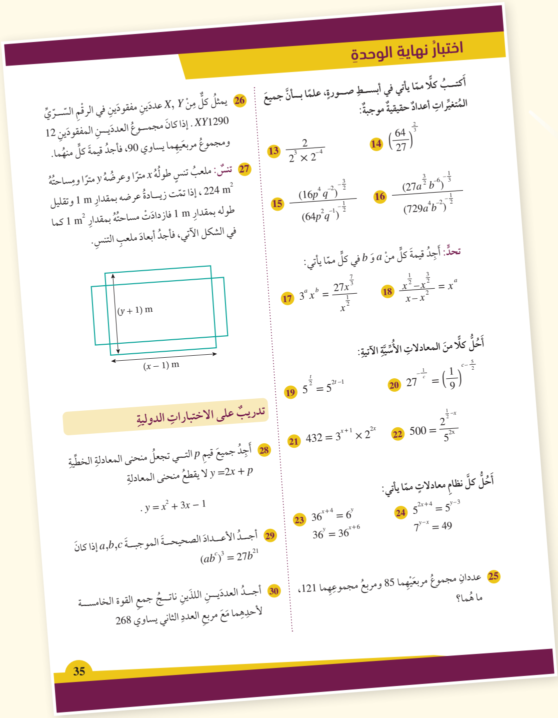
أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثُمَّ أَتَحَقَّقُ مِنْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$2x + y = 12$$
$$y = x^2 + 5x - 6$$

ج التقويم الختامي:

يأتي هذا التقويم في نهاية عملية التدريس، أو في نهاية الوحدة الدراسية. وهو يساعد على تحديد مدى إتقان الطلبة للمفاهيم والمهارات التي تم تقديمها لهم.

توفِّر المناهج المُطوَّرة أداة للتقويم الختامي في كل وحدة، تتمثَّل في فقرة (اختبار نهاية الوحدة) الذي يحوي مسائل مُتنوِّعة تشمل نتاجات الوحدة كلها.



3 تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها:

تُعَدُّ المصطلحات إحدى ركائز تعلُّم الرياضيات؛ فهي الوعاء الذي يحمل المعاني الرياضية، وينقلها بين المسائل والسياقات المختلفة. ولهذا أبرزت مناهج الرياضيات المطورة المصطلحات الرياضية التي يتعرَّفها الطلبة أول مرَّة، وميَّزتها بلون مختلف داخل نصوص الشرح، وأوردت مرادفاتها من اللغة الإنجليزية بهدف إثراء معرفة الطلبة.

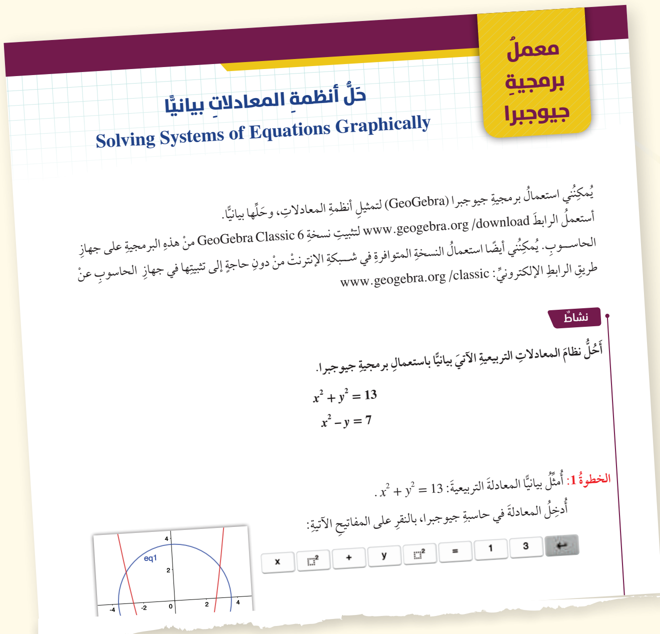
4 بعض استراتيجيات التعلُّم:

أ التعلُّم القائم على المشاريع.

يُعَدُّ التعلُّم القائم على المشاريع أحد أساليب التعلُّم الحديثة التي تدمج بين المعرفة والتطبيق؛ إذ يمكن للطلبة دراسة معارف المناهج الدراسية الأساسية، ثم تطبيقها في حلِّ مشكلات حقيقية وصولًا إلى نتائج قابلة للتطبيق. تساعد هذه الطريقة الطلبة على تنمية قدراتهم ومهاراتهم؛ فهي تراعي الفروق الفردية بينهم، وتُنمّي لديهم الثقة بالنفس، وتُحفِّزهم على الإبداع، والتواصل، والابتكار، وتحمُّل المسؤولية، وتُعِدُّهم للحياة، وتحثُّهم على العمل والإنتاج.

ب التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.

تُسهِم التكنولوجيا إسهامًا فاعلًا في تعلُّم الرياضيات؛ فهي تُوفِّر تمثيلات بصرية للمفاهيم الرياضية بصورة تفاعلية تزيد من رغبة الطلبة في التعلُّم، وتساعد على استكشاف المفاهيم الجديدة. إنَّ توافر الأدوات التكنولوجية يساعد الطلبة على التأمُّل والتحليل والتفكير بدلًا من إضاعة أوقاتهم في إجراء الحسابات الرتيبة.



معملُ برمجيةِ جيوجبرا

حَلُّ أنظمةِ المعادلاتِ بيانيًّا

Solving Systems of Equations Graphically

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra) لتمثيلِ أنظمةِ المعادلاتِ، وحَلِّها بيانيًّا.
أستعملُ الرابطَ www.geogebra.org /download لتثبيتِ نسخةِ GeoGebra Classic 6 منْ هذهِ البرمجيةِ على جهازِ الحاسوبِ. يُمكِنُني أيضًا استعمالُ النسخةِ المتوافرةِ في شبكةِ الإنترنتْ منْ دونِ حاجةٍ إلى تثبيتِها في جهازِ الحاسوبِ عنْ طريقِ الرابطِ الإلكترونيِّ: www.geogebra.org /classic

نشاطٌ

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$x^2 - y = 7$$

الخطوةُ 1: أُمثِّلُ بيانيًّا المعادلةَ التربيعيةَ: $x^2 + y^2 = 13$.

أُدخِلُ المعادلةَ في حاسبةِ جيوجبرا، بالنقرِ على المفاتيحِ الآتيةِ:

تمنح أدلة المُعلِّم في مناهج الرياضيات المُطوَّرة فرصة توظيف عدد من البرمجيات التعليمية في تدريس الطلبة؛ سواء أكان ذلك في المدرسة، أم في المنزل.

5 مهارات التفكير العليا:

تهدف **مهارات التفكير العليا** إلى تحدّي قدرات الطلبة في مجال التفسير، والتحليل، ومعالجة المعلومات؛ لذا، فهي تُنمّي قدراتهم على التأمُّل، والتفكير، والاستقصاء، واكتشاف العلاقات.

13 ثقافةٌ ماليةٌ: بالعودةِ إلى مقدمةِ الدرسِ، أَستعملُ نظامَ المعادلاتِ المعطى لإيجادِ نقاطِ التوازنِ التي يتساوى عندَها العرضُ والطلبُ.

14 أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$
$$x^2 + xy = 6$$

مهارات التفكير العليا

15 تبريرٌ: قالَتْ زينبُ إنَّهُ لا يوجدُ حَلٌّ لنظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

هلْ قولُ زينبَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

16 مسألةٌ مفتوحةٌ: أكتبُ نظامًا مُكوَّنًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ ليسَ لهُ حَلٌّ.

17 تحدٍّ: قطعةُ أرضٍ على شكلِ مثلثٍ مُتطابِقِ الضلعيْنِ، طولُ ضلعِهِ المُتطابِقِ 50 m، ومساحتُهُ $1200\ m^2$. أَجِدُ طولَ قاعدتِهِ، وارتفاعَهُ.

18 مسألةٌ مفتوحةٌ: أكتبُ نظامًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ؛ على أنْ تكونَ النقطةُ (5, 3) أحدَ حلولِهِ.

19 تحدٍّ: قطعةٌ منْ ورقٍ مُقوّى مستطيلةُ الشكلِ، مساحتُها $216\ cm^2$، ثُنِيَ طولاها، ولُصِقا معًا، فتشكَّلَ أنبوبٌ أسطوانيٌّ حجمُهُ $224\ cm^3$. أَجِدُ بُعْدَيْ قطعةِ الورقِ.

22

تمنح مناهج الرياضيات المُطوَّرة الطلبة فرصة لتطوير مهارات التفكير العليا في كل درس، بطرحها مسائل مرتبطة بنتاجات الدرس؛ إذ يحوي بند (مهارات التفكير العليا) عددًا من المسائل ضمن العناوين الآتية:

تبرير: يتطلَّب حلُّ هذه المسائل تبرير خطوات الحلِّ جميعها.

تحدٍّ: تتضمَّن هذه المسائل أفكارًا غير مألوفة تُمثِّل تحدِّيًا للطلبة.

مسألة مفتوحة: يوجد لهذه المسألة عدد من الحلول الصحيحة، وليس حلًّا واحدًا فقط.

أكتشف الخطأ: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحديد الخطأ في إجابة معطاة؛ ما يُحتِّم عليهم إدراك مفاهيم الدرس بصورة عميقة.

أيُّها مختلف: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحليل عدد من الخيارات المعطاة، ثم تحديد خيار واحد فقط مختلف عن البقية.

ما السؤال: يُعطى الطلبة في هذا النوع من المسائل إجابة لمسألة ما، ثم يُطلَب إليهم كتابة هذه المسألة.

6 الوصول إلى الطلبة كافةً:

تراعي مناهج الرياضيات المُطوَّرة تكافُؤ الفرص بين الطلبة، وخصوصية كل منهم (التمايز)، وتساعد على تجاوز العثرات، وتعزيز مناحي التفوّق.

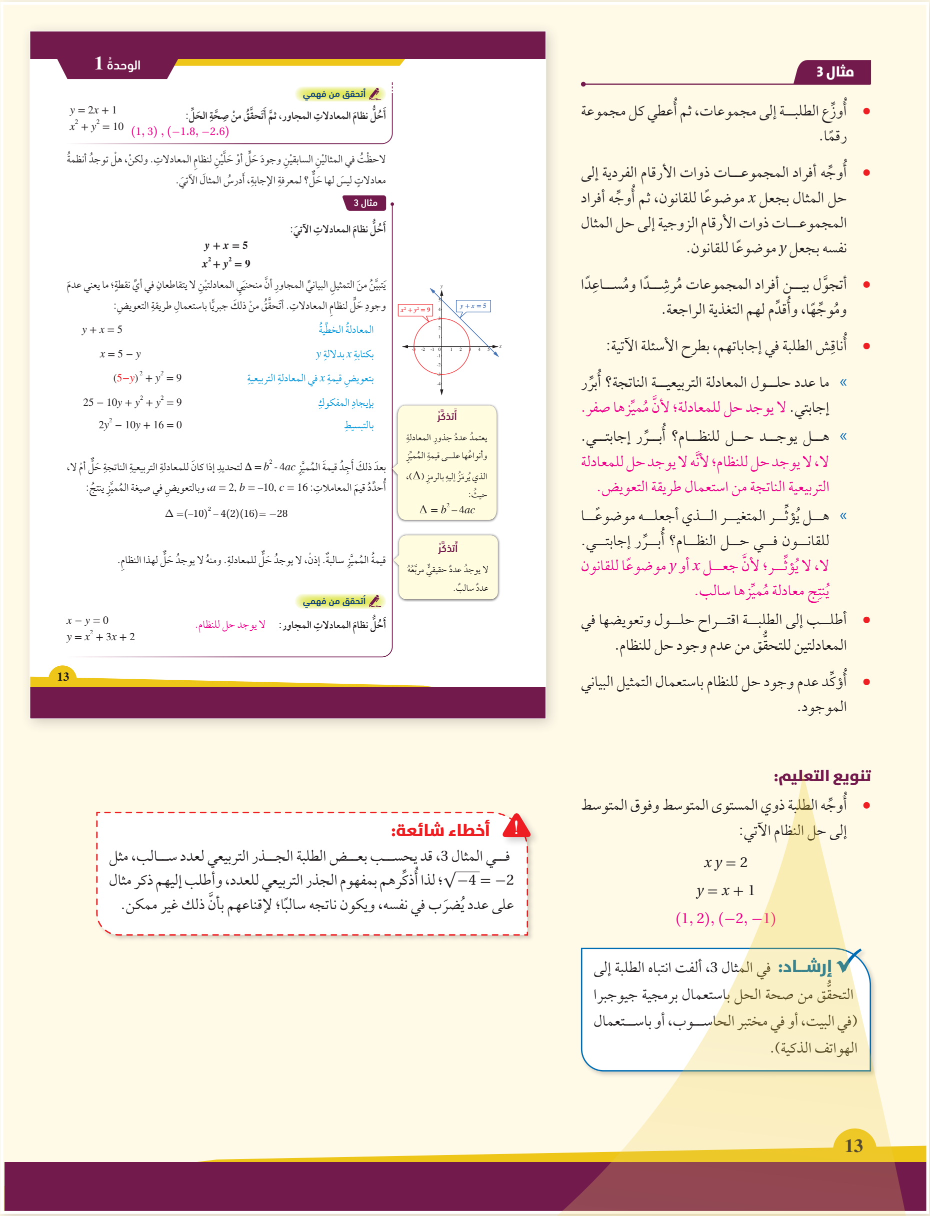
يُمكِن تحقيق التمايز عن طريق أربعة عناصر رئيسة، هي:

المحتوى: يُقصَد بذلك ما يحتاج كل من الطلبة إلى تعلُّمه، وكيفية الحصول على المعلومة. من الأمثلة على تحقيق التمايز في المحتوى: تقديم الأفكار باستعمال الوسائل السمعية والبصرية والمحسوسة.

الأنشطة: كل ما يشارك فيه كل من الطلبة من أنشطة؛ للتمكُّن من فهم المحتوى، أو إتقان المهارة. من الأمثلة على تحقيق التمايز في هذا العنصر: استعمال الأنشطة المُتدرِّجة التي يشارك فيها جميع الطلبة، ويكون تقدُّمهم فيها مُتباينًا من حيث المستوى، ومنح الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط وقتًا إضافيًّا لإنجاز المهام.

المُنتَجات: مشاريع يتعيَّن على الطلبة تنفيذها؛ للتدرُّب على ما تعلَّموه في الوحدة، وتوظيفه في حياتهم، والتوسُّع فيه. من الأمثلة على تحقيق التمايز في المُنتَجات: السماح للطلبة بالعمل وحدهم، أو في مجموعات صغيرة لابتكار مُنتَجاتهم الخاصة وَفق ميولهم.

بيئة التعلُّم: يُقصَد بها عناصر البيئة الصفية جميعها. من الأمثلة على تحقيق التمايز في بيئة التعلُّم: التحقُّق من وجود أماكن في غرفة الصف يُمكِن للطلبة العمل فيها بهدوء، ومن دون إلهاء. وكذلك وجود أماكن أُخرى تُسهِّل العمل التعاوني بين الطلبة.



الوحدةُ 1

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاورِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$y = 2x + 1$

$x^2 + y^2 = 10$

$(1, 3)$, $(-1.8, -2.6)$

لاحظْتُ في المثالَيْنِ السابقَيْنِ وجودَ حَلٍّ أوْ حَلَّيْنِ لنظامِ المعادلاتِ. ولكنْ، هلْ توجدُ أنظمةُ معادلاتٍ ليسَ لها حَلٌّ؟ لمعرفةِ الإجابةِ، أَدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 3

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$y + x = 5$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

يَتبيَّنُ منَ التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ أنَّ منحنيَي المعادلتَيْنِ لا يتقاطعانِ في أيِّ نقطةٍ؛ ما يعني عدمَ وجودِ حَلٍّ لنظامِ المعادلاتِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

المعادلةُ الخطِّيَّةُ	$y + x = 5$
بكتابةِ x بدلالةِ y	$x = 5 - y$
بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ التربيعيةِ	$(5-y)^2 + y^2 = 9$
بإيجادِ المفكوكِ	$25 - 10y + y^2 + y^2 = 9$
بالتبسيطِ	$2y^2 - 10y + 16 = 0$

بعدَ ذلكَ أَجِدُ قيمةَ المُميِّزِ $\Delta = b^2 - 4ac$ لتحديدِ إذا كانَ للمعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ حَلٌّ أمْ لا. أُحدِّدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 2, b = -10, c = 16$، وبالتعويضِ في صيغةِ المُميِّزِ ينتجُ:

$$\Delta = (-10)^2 - 4(2)(16) = -28$$

قيمةُ المُميِّزِ سالبةٌ. إذنْ، لا يوجدُ حَلٌّ للمعادلةِ. ومنهُ لا يوجدُ حَلٌّ لهذا النظامِ.

أَتذكَّرُ

يعتمدُ عددُ جذورِ المعادلةِ وأنواعُها على قيمةِ المُميِّزِ الذي يُرمَزُ إليهِ بالرمزِ (Δ)، حيثُ:

$\Delta = b^2 - 4ac$

أَتذكَّرُ

لا يوجدُ عددٌ حقيقيٌّ مربَّعُهُ عددٌ سالبٌ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاورِ: لا يوجد حل للنظام.

$x - y = 0$

$y = x^2 + 3x + 2$

13

مثال 3

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أُعطي كل مجموعة رقمًا.
- أُوجِّه أفراد المجموعات ذوات الأرقام الفردية إلى حل المثال بجعل x موضوعًا للقانون، ثم أُوجِّه أفراد المجموعات ذوات الأرقام الزوجية إلى حل المثال نفسه بجعل y موضوعًا للقانون.
- أتجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أُناقِش الطلبة في إجاباتهم، بطرح الأسئلة الآتية:
  - » ما عدد حلول المعادلة التربيعية الناتجة؟ أُبرِّر إجابتي. لا يوجد حل للمعادلة؛ لأنَّ مُميِّزها صفر.
  - » هل يوجد حل للنظام؟ أُبرِّر إجابتي. لا، لا يوجد حل للنظام؛ لأنَّه لا يوجد حل للمعادلة التربيعية الناتجة من استعمال طريقة التعويض.
  - » هل يُؤثِّر المتغير الذي أجعله موضوعًا للقانون في حل النظام؟ أُبرِّر إجابتي. لا، لا يُؤثِّر؛ لأنَّ جعل x أو y موضوعًا للقانون يُنتِج معادلة مُميِّزها سالب.
- أطلب إلى الطلبة اقتراح حلول وتعويضها في المعادلتين للتحقُّق من عدم وجود حل للنظام.
- أُؤكِّد عدم وجود حل للنظام باستعمال التمثيل البياني الموجود.

تنويع التعليم:

- أُوجِّه الطلبة ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط إلى حل النظام الآتي:

$$x\,y = 2$$
$$y = x + 1$$

$(1, 2), (-2, -1)$

أخطاء شائعة: في المثال 3، قد يحسب بعض الطلبة الجذر التربيعي لعدد سالب، مثل $\sqrt{-4} = -2$؛ لذا أُذكِّرهم بمفهوم الجذر التربيعي للعدد، وأطلب إليهم ذكر مثال على عدد يُضرَب في نفسه، ويكون ناتجه سالبًا؛ لإقناعهم بأنَّ ذلك غير ممكن.

إرشاد: في المثال 3، ألفت انتباه الطلبة إلى التحقُّق من صحة الحل باستعمال برمجية جيوجبرا (في البيت، أو في مختبر الحاسوب، أو باستعمال الهواتف الذكية).

13

تنويع التعليم:

- أُوجِّه الطلبة ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط إلى حل النظام الآتي:

$$x\,y = 2$$
$$y = x + 1$$

$(1, 2), (-2, -1)$

استراتيجيات تدريس إضافية

عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة، تساعد مناهج الرياضيات المُطوَّرة على تطبيق أحدث استراتيجيات التدريس، بما تحويه من عناصر مُنظَّمة في كتاب الطالب، ومقترحات، وإرشادات مناسبة للتدريس في هذا الدليل، علمًا بأنَّ مسألة تطبيقها متروكة لك؛ إذ يُمكِن لك اختيار طرائق التدريس المناسبة داخل غرفة الصف؛ فأنت أكثر علمًا بأحوال غرفة الصف، والوسائل والتجهيزات المتوافرة في المدرسة.

في ما يأتي بعض استراتيجيات التدريس الإضافية التي قد تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على تقديم الدروس:

التعلُّم المقلوب (Flipped Learning):

يسهم هذا الأسلوب في تعزيز مهارات التعلم الذاتي واستثمار وقت الحصة الصفية استثمارًا كبيرًا والتركيز على المحتوى والمفاهيم العلمية بشكل مكثف. تتيح هذه الاستراتيجية لك إعداد الدروس وإطلاع الطلبة عليها مسبقًا بالاستعانة بالتقنيات الحديثة وشبكة (الإنترنت)، إذ يمكن إرسال مقاطع مرئية (فيديوهات) أو ملفات صوتية أو غيرها من الوسائط إلى الطلبة، والطلب إليهم الاطلاع عليها في المنازل قبل وقت كافٍ من الوقت المخصص لعرض الدرس، عن طريق الوسائل المتاحة لهم (حاسوب، هاتف ذكي، جهاز لوحي). يتعين عليك تجهيز أنشطة متنوعة لتنفيذها في اللقاء الصفي تهدف إلى تطبيق المفاهيم التي اكتسبها الطلبة ومناقشة المحتوى العام للدرس، وتشمل أنشطة التعلم النشط والاستقصاء، والتجريب، وحلّ المسائل الرياضية، وبما يعزز مهارات العمل بروح الفريق وتقييم التعلم.

بطاقة الخروج (Exit Ticket):

أسلوب يتضمَّن مهمة قصيرة يُنفِّذها الطلبة في مرحلة ختام الدرس. وفيه يجيب الطلبة عن أسئلة قصيرة مُحدَّدة مكتوبة في بطاقات صغيرة، بعد ذلك عليك جمع البطاقات لقراءة الإجابات، ثم التعليق عليها في الحصة التالية، في ما يُمثِّل تغذية راجعة يُستنَد إليها في الحصة اللاحقة.

رفع اليد (إشارة الصمت) (Hand Up):

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف. وفيه عليك رفع يدك، فيستجيب الطلبة برفع أيديهم، وإنهاء مناقشاتهم فورًا. تُعَدُّ هذه الاستراتيجية طريقة فاعلة وسريعة للفت انتباه الطلبة، ويُمكِن استخدامها في بداية الحصة، أو للإعلان عن انتهاء النشاط. تجدر الإشارة إلى أنَّ رفع يدك يجب أنْ يُقابَل باستجابات ثلاث: رفع جميع الطلبة أيديهم من دون استثناء، والتزامهم الصمت التام، والإصغاء.

الرؤوس المُرقَّمة (Numbered Heads):

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف، وتوزيع المسؤوليات. وهو يهدف إلى إبقاء الطلبة في وضع استعداد دائم، عن طريق الاختيار العشوائي لمشاركاتهم وإجابتهم عن الأسئلة. ففي العمل الجماعي يكون لكل فرد في المجموعة رقم خاص، وعند طلبك الحصول على إجابة سؤال بصورة عشوائية، يختار الفرد رقمًا من دون أنْ يعرف زميله/ زميلتها، فيجيب من يقع عليه الاختيار عن السؤال، ويمكن أن يتم ذلك بمساعدة أفراد المجموعة.

أنا أُفكِّر، نحن نُفكِّر (I Think, We Think):

أسلوب يُستعمَل لتطوير تفكير الطلبة ضمن مجموعات. وفيه تُعِدُّ كل مجموعة ورقة تتضمَّن جدولًا من عمودين؛ عنوان الأوَّل: (أنا أُفكِّر)، وعنوان الثاني: (نحن نُفكِّر). ثم يمكنك توجيه سؤال يجيب عنه الطلبة بصورة فردية في العمود الأوَّل، ثم يُناقِش الطلبة إجاباتهم للاتفاق على إجابة واحدة تُكتَب في العمود الثاني، ويُمكِن تغيير الورقة عند الحاجة. يساعد هذا الأسلوب الطلبة على التفكير في الموضوع، وتأمُّل التغيُّر في تفكيرهم نتيجة التحدُّث إلى الآخرين.

الألواح الصغيرة (Small Boards):

أسلوب يُستعمَل للتقويم. وفيه يُمسِك كل طالب/ طالبة بلوح صغير (يُمكِن أنْ يُصنَع من قطعة كرتون مقوًّى، أو قطعة خشب صغيرة يُكتَب عليها بالطبشور، أو قطعة كرتون عليها لاصق شفّاف يُكتَب عليها بقلم اللوح الأبيض)، ثم يمكنك توجيه سؤال يجيب عنه الطلبة بالكتابة على اللوح، ثم رفعه إلى أعلى؛ للتمكن من مشاهدة الإجابات بسهولة. يُسهِم هذه الأسلوب في زيادة مشاركة الطلبة؛ لأنَّهم يجيبون جميعًا في الوقت نفسه من دون إحداث فوضى، ويُسهِم أيضًا في التقويم التكويني؛ إذ يمكنك ملاحظة نسبة إجابات الطلبة الصحيحة.

الوحدة
1

الأسس والمعادلات
Exponents and Equations

www.nccd.gov.jo

مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
معمل برمجية جيوجبرا: حل أنظمة المعادلات بيانيًّا.	• استعمال برمجية جيوجبرا لحل نظام معادلات خطية وتربيعية بيانيًّا.		• برمجية جيوجبرا.	1
الدرس 1: حل نظام مُكوَّن من معادلة خطية ومعادلة تربيعية.	• حل نظام مُكوَّن من معادلة خطية وأخرى تربيعية. • تعرُّف عدد الحلول الممكنة لنظام مُكوَّن من معادلة خطية وأخرى تربيعية. • نمذجة مسألة حياتية باستعمال نظام مُكوَّن من معادلة خطية ومعادلة تربيعية، ثم حل النظام.		• برمجية جيوجبرا. • الآلة الحاسبة.	4
الدرس 2: حل نظام مُكوَّن من معادلتين تربيعيتين.	• حل نظام مُكوَّن من معادلتين تربيعيتين. • يتعرف عدد الحلول الممكنة لنظام مُكوَّن من معادلتين تربيعيتين. • نمذجة مسألة حياتية باستعمال نظام مُكوَّن من معادلتين تربيعيتين، ثم حل النظام.		• برمجية جيوجبرا.	3
الدرس 3: تبسيط المقادير الأسية.	• تعرُّف الأسس النسبية وخصائصها. • كتابة مقادير أسية في أبسط صورة.	الأس النسبي.	• الآلة الحاسبة.	3
الدرس 4: حل المعادلة الأسية.	• حل معادلات أسية. • حل أنظمة معادلات أسية.	المعادلة الأسية.	• برمجية جيوجبرا.	3
عرض نتائج مشروع الوحدة.				1
اختبار نهاية الوحدة.				2
مجموع الحصص:				17 حصة

الوحدة 1


الوحدةُ 1

الأسسُ والمعادلاتُ
Exponents and Equations

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستخدَمُ أنظمةُ المعادلاتِ في كثيرٍ منْ مجالاتِ الحياةِ. فخبراءُ الأرصادِ الجويةِ -مثلًا- يُعبِّرونَ عنِ العلاقةِ بينَ درجةِ الحرارةِ، وسرعةِ الرياحِ، والضغطِ الجويِّ، ومعدلِ الهطلِ، باستخدامِ نظامِ معادلاتٍ غيرِ خطِّيٍّ؛ ذلكَ أنَّ أيَّ تغيُّرٍ في أحدِ هذهِ العواملِ يؤدّي إلى تغيُّرٍ في العواملِ الأُخرى.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ حَلَّ معادلاتٍ تربيعيةٍ باستعمالِ التحليلِ.
- ✓ حَلَّ معادلاتٍ تربيعيةٍ باستعمالِ القانونِ العامِّ.
- ✓ حَلَّ أنظمةِ معادلاتٍ تتضمَّنُ معادلتيْنِ خطِّيتيْنِ بمُتغيِّريْنِ.
- ✓ قواعدَ الأسسِ الصحيحةِ.

سأَتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ حَلَّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ، وأُخرى تربيعيةٍ.
- ◄ حَلَّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ.
- ◄ الأسسَ النسبيةَ، وخصائصَها.
- ◄ حَلَّ أنظمةِ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ.

6

نظرة عامة على الوحدة:

تعلَّم الطلبة سابقًا حل معادلات خطية وتربيعية، وحل أنظمة معادلات مُكوَّنة من معادلتين خطيتين، وسيتعلَّمون في هذه الوحدة حل معادلات غير خطية، مثل: المعادلة الأسية، وعِدَّة أنواع من أنظمة المعادلات، مثل: حل نظام مُكوَّن من معادلة خطية وأخرى تربيعية، أو معادلتين تربيعيتين ومعادلتين أسيتين، وتبسيط مقادير جبرية. وقد تعلَّم الطلبة سابقًا الربط بين الأسس والجذور، وتبسيط المقادير العددية والمقادير الجبرية باستعمال الأسس النسبية، وتقدير قِيَم الجذور التربيعية، وسيبنون على ذلك في هذه الوحدة لتعلُّم تبسيط مقادير أسية أكثر تعقيدًا.

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف التاسع

- التحليل إلى العوامل.
- حل معادلة تربيعية بطرائق مختلفة (التحليل، إكمال المربع، القانون العام).
- استعمال مُميِّز المعادلة التربيعية في تحديد عدد حلولها.

الصف الثامن

- حل نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين جبريًا وبيانيًا.
- الربط بين الأسس النسبية والجذور.

الصف العاشر

- حل أنظمة المعادلات الآتية: معادلة خطية وأخرى تربيعية، معادلتان تربيعيتان، معادلتان أسيتان.
- تعرُّف عدد الحلول الممكنة لنظام من المعادلات.
- حل مسائل رياضية وحياتية عن أنظمة المعادلات.
- تعرُّف الأسس النسبية وخصائصها.
- تبسيط مقادير أسية.
- حل معادلات أسية.
- التحقُّق من صحة الحل باستعمال البرمجيات.

الصف الحادي عشر (العلمي)

- حل أنظمة المتباينات.
- تعرُّف الاقترانات الأسية والاقترانات اللوغاريتمية وخصائص كلٍّ منهما.
- حل معادلات أسية.
- حل مسائل تتضمَّن تطبيقات اقتصادية على الاقترانات الأسية والاقترانات اللوغاريتمية.

مشروعُ الوحدةِ

أنظمةُ المعادلاتِ في حياتِنا

فكرةُ المشروعِ البحثُ عنْ أنظمةِ معادلاتٍ في نماذجَ حياتيةٍ.

الموادُّ والأدواتُ شبكةُ الإنترنتْ، برمجيةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أبحثُ معَ أفرادِ مجموعتي في شبكةِ الإنترنتْ عنْ صورٍ لنماذجَ حياتيةٍ تظهرُ فيها منحنياتٌ ومستقيماتٌ متقاطعةٌ (مثلُ: الجسورِ، ونوافيرِ المياهِ، وخرائطِ الطرقِ)، أوْ ألتقطُ صورًا لذلكَ، ثمَّ أحفظُها في ملفٍّ على جهازِ الحاسوبِ.
2. أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ معادلةِ كلٍّ منَ المنحنياتِ المتقاطعةِ التي تظهرُ في الصورِ باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:
   - أنقرُ على أيقونةِ Image منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أختارُ الصورةَ التي حفظتُها.
   - أُعدِّلُ موقعَ الصورةِ، وأختارُ مقاسًا مناسبًا لها بتحريكِ النقطتيْنِ A وَ B اللتيْنِ تظهرانِ عليْها.
   - أَجِدُ معادلةَ أحدِ المنحنياتِ التي تظهرُ في الصورةِ، وذلكَ بتحديدِ بعضِ النقاطِ عليْهِ باستعمالِ أيقونةِ A منْ شريطِ الأدواتِ.
   - أكتبُ الصيغةَ FitPoly ({C, D, E, F, G, H, I, J, K, L},n) في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ ↵ ليظهرَ منحنًى فوقَ الصورةِ، ومعادلةٌ في شريطِ الإدخالِ.
   - أستعملُ المُؤشِّرَ فوقَ المعادلةِ لضبطِ المنحنى الظاهرِ، بحيثُ ينطبقُ تمامًا على المنحنى الذي في الصورةِ.
   - أُكرِّرُ الخطواتِ السابقةَ لتحديدِ معادلاتِ المنحنياتِ الأُخرى التي تظهرُ في الصورةِ.
3. أكتبُ مع أفرادِ مجموعتي نظامَ معادلاتٍ يُمثِّلُ منحنيَيْنِ متقاطعيْنِ في كلِّ صورةٍ، ثمَّ نختارُ إحدى هذهِ الأنظمةِ لنحُلَّها جبريًّا، ثمَّ نتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ بإظهارِ نقاطِ تقاطعِ المنحنييْنِ في برمجيةِ جيوجبرا.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا نُبيِّنُ فيهِ ما يأتي:

- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ (نستعملُ خاصيةَ طباعةِ الشاشةِ).
- بعضُ الصعوباتِ التي واجهْناها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، ومعلومةٌ جديدةٌ تعرَّفْناها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ.

7

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	تنفيذ أفراد المجموعة خطوات المشروع على النحو المطلوب.			
2	عرض أفراد المجموعة المشروع بطريقة واضحة.			
3	توثيق أفراد المجموعة مصادر المعلومات التي تعرَّفوها.			
4	عمل أفراد المجموعة بروح الفريق.			
5	تعبير أفراد المجموعة عن الصور بمعادلات جبرية.			
6	حل أفراد المجموعة النظام جبريًّا، وتحقُّقهم من صحة الحل.			
7	حل أفراد المجموعة نظام المعادلات حلًّا صحيحًا.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.

2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.

3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: أنظمة المعادلات في حياتنا.

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى ربط الرياضيات بالحياة، وتنمية مهارات البحث والتمثيل والتفسير والنمذجة، بالبحث عن صور لنماذج حياتية تظهر فيها منحنيات ومستقيمات متقاطعة، مثل: الشوارع، والجسور، والطرق المتقاطعة، والمنشآت المعمارية.

خطوات تنفيذ المشروع

- أُعرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلُّم موضوعات الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، تتكوَّن كلٌّ منها من (5–7) طلبة، ثم اطلب إليهم أنْ يُوزِّعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لكل مجموعة.
- أذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، مثل: جهاز الحاسوب، وبرمجية جيوجبرا، وآلة التصوير، فضلًا عن بيان عناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع أوَّلًا بأوَّل، وتعزيزه بالصور المناسبة. ثم أُذكِّرهم بإمكانية استعمال خاصية طباعة الشاشة (print screen) الموجودة على لوحة المفاتيح في جهاز الحاسوب لتوثيق خطوات التنفيذ المتعلقة بجهاز الحاسوب وبرمجية جيوجبرا.
- أُوضِّح للطلبة معايير تقييم أعمالهم، مستعينًا بسلم التقدير.
- عند انتهاء الوحدة، أُحدِّد وقتًا مناسبًا لعرض النتائج التي توصَّل إليها الطلبة، وأُناقِشهم فيها.
- أطلب إلى الطلبة تسجيل تقييمهم الذاتي لمشروعهم.
- أطلب إلى الطلبة التصويت على المشروع الأفضل.

عرض النتائج

- ألفت انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، وإعداد عرض تقديمي، يحوي صورًا لمراحل التنفيذ.
- أُوضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلُّب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارة حل المشكلات لديهم.

معمل برمجية جيوجبرا

هدف النشاط:

- تمثيل أنظمة المعادلات، وحلها بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا.

المصادر والأدوات:

- برمجية جيوجبرا.

خطوات العمل:

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية.
- أطلب إلى الطلبة تشغيل أجهزة الحاسوب، وفتح برمجية جيوجبرا (GeoGebra).
- أُعرِّف الطلبة بمزايا برمجية جيوجبرا الجبرية والهندسية. فمثلًا، يمكن استعمال هذه البرمجية في حل المعادلات، ورسم المجسمات والأشكال ثنائية البُعْد، وقياس الزوايا وأطوال القطع المستقيمة.
- أُوضِّح للطلبة كيفية تنفيذ النشاط، ثم أطلب إليهم تنفيذه بأنفسهم.
- أطلب إلى أفراد المجموعات تطبيق الخطوات على التوالي، ثم أتجوَّل بينهم مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وأتأكَّد أنَّ كل فرد في المجموعة قد تمكَّن من تنفيذ النشاط.
- أُناقِش الطلبة في عدد نقاط التقاطع التي تُمثِّل حلول النظام، وعلاقة عدد الحلول بعدد نقاط التقاطع، ثم أطرح عليهم السؤالين الآتيين:
  - » هل يُتوقَّع أنْ يكون عدد الحلول أربعة دائمًا؟
  - » هل يوجد نظام له ثلاثة حلول، أو حلان، أو حل واحد، أو ليس له حل؟
- أطلب إلى عدد من الطلبة رسم منحنيين يُمثِّلان كل حالة على اللوح، ثم أسأل الطلبة:
  - » أيُّكم يُوافِقهم الرأي؟
  - » مَنْ يعرض رسمًا آخرَ؟

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

حَلُّ أنظمةِ المعادلاتِ بيانيًّا
Solving Systems of Equations Graphically

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra) لتمثيلِ أنظمةِ المعادلاتِ، وحَلِّها بيانيًّا.
أستعملُ الرابطَ www.geogebra.org /download لتثبيتِ نسخةِ GeoGebra Classic 6 منْ هذهِ البرمجيةِ على جهازِ الحاسوبِ. يُمكِنُني أيضًا استعمالُ النسخةِ المتوافرةِ في شبكةِ الإنترنتْ منْ دونِ حاجةٍ إلى تثبيتِها في جهازِ الحاسوبِ عنْ طريقِ الرابطِ الإلكترونيِّ: www.geogebra.org /classic

نشاطٌ

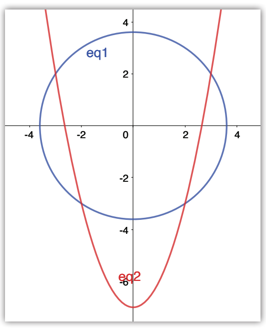
أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$x^2 - y = 7$$

الخطوةُ 1: أُمثِّلُ بيانيًّا المعادلةَ التربيعيةَ: $x^2 + y^2 = 13$.

أُدخِلُ المعادلةَ في حاسبةِ جيوجبرا، بالنقرِ على المفاتيحِ الآتيةِ:

x □² + y □² = 1 3 ↵



الخطوةُ 2: أُمثِّلُ بيانيًّا المعادلةَ التربيعيةَ: $x^2 - y = 7$.

أُدخِلُ المعادلةَ في حاسبةِ جيوجبرا، بالنقرِ على المفاتيحِ الآتيةِ:

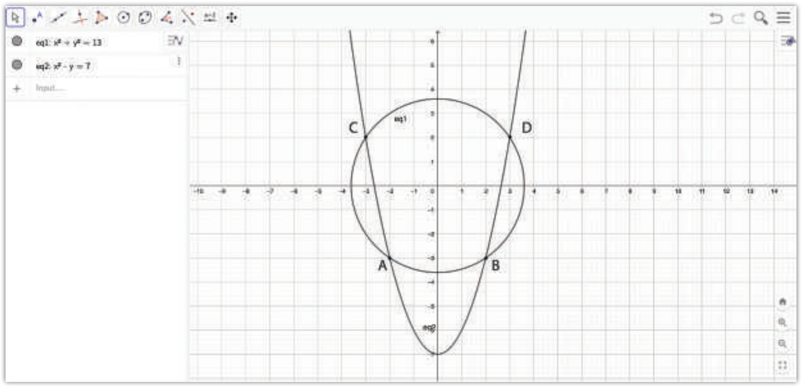
x □² − y = 7 ↵

ألاحِظُ أنَّ منحنيَي المعادلتيْنِ يتقاطعانِ في أربعِ نقاطٍ؛ ما يعني وجودَ أربعةِ حلولٍ لنظامِ المعادلاتِ.

إرشادات:

- أُحمِّل نسخة من برمجية جيوجبرا في أجهزة الحاسوب بمختبر المدرسة، وأعمل على تحديثها باستمرار، مُستعمِلًا الرابط: https://www.geogebra.org/download
- إذا توافر جهاز عرض في المختبر، فأعرض خطوات النشاط أمام الطلبة، ثم أطلب إليهم بدء تنفيذ الخطوات نفسها في أسئلة بند (أتدرَّب).
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكنهم تحميل برمجية جيوجبرا في هواتفهم الذكية من متجر الهاتف، فضلًا عن وجود العديد من البرمجيات والآلات الحاسبة البيانية التي يمكنهم استعمالها.

الخطوةُ 3: أُحــدِّدُ إحداثياتِ نقاطِ التقاطعِ بينَ منحنيَي المعادلتيْنِ. أختارُ Intersect مِنْ شــريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ على منحنيَي المعادلتيْنِ، فتظهرُ إحداثياتُ نقاطِ التقاطعِ.



إحداثياتُ نقاطِ التقاطعِ هيَ: $(-3, 2), (3, 2), (2, -3), (-2, -3)$؛ ما يعني أن حلولَ نظامَ المعادلاتِ هيَ:

الحَلُّ الأولُ: $x=-3, y=2$ **الحَلُّ الثاني:** $x=3, y=2$

الحَلُّ الثالثُ: $x=2, y=-3$ **الحَلُّ الرابعُ:** $x=-2, y=-3$

أتدرب

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا:

1) $y=x-4$ ، $2x^2+3y^2=12$ لا يوجد حل.

2) $y=x^2$ ، $x^2+2y^2=34$ $(-1.97, 3.881)$, $(1.97, 3.881)$

3) $x+y=16$ ، $x^2-y^2=20$ $(8.625, 7.375)$

4) $3x+4y=1$ ، $y=x^2+5$ لا يوجد حل.

5) $y=6x$ ، $x^2+y^2=9$ $(0.493, 2.959)$, $(-0.493, -2.959)$

6) $x=7+y$ ، $y=3x^2-2$ لا يوجد حل.

تنويع التعليم:

- أطلب إلى الطلبة ذوي المســتوى دون المتوسط حل معادلــة خطية فقط أو معادلة تربيعية بيانيًّا باســتعمال برمجية جيوجبرا، في خطوة أولى، وأتدرَّج معهم في خطوات التطبيق حتــى يتمكنوا من حل النظام المُبيَّن في النشاط.

- أطلب إلى الطلبة الإجابة عن الأســئلة (6–1) في بند (أتدرَّب)، وأتجوَّل بينهم مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا.

- أختــار بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة – من دون ذكر اسماء الطلبة؛ تجنبًا لإحراجهم–، ثم أُناقِش طلبة الصف فيها.

إرشــاد: يمكن إعادة توزيع الطلبة في بعــض المجموعات قبل البدء بحل أسئلة بند (أتدرَّب)؛ تعزيزًا لتبادل الخبرات بينهم.

الدرس 1

نتاجات الدرس

- حل نظام مُكوَّن من معادلة خطية وأخرى تربيعية.
- حل مسائل رياضية وحياتية باستعمال أنظمة المعادلات.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل، وبالقانون العام.
- حل نظام معادلات مكون من معادلتين خطيتين.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أكتب نظام المعادلات الآتي على اللوح:
$x\,y = 10$, $x + y = 7$ ، ثم أسأل الطلبة:
  » بماذا يختلف هذا النظام عمّا تعرفونه؟
  » كيف يمكن حله؟
- أستمع لإجابات أكبر عدد من الطلبة، وأسألهم دائمًا: مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟ لماذا؟ مَنْ لديه إجابة أخرى؟ ما هذه الإجابة؟ وذلك لتعزيز مهارات التواصل لدى الطلبة (التعبير عن الرأي، واحترام الرأي الآخر).
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون حلَّ مثل النظام السابق في هذا الدرس.

الدرس 1
حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ
Solving a System of Linear and Quadratic Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ.

مسألةُ اليومِ تُمثِّلُ المعادلةُ $y = x - 3$ طريقًا مستقيمًا داخلَ إحدى المدنِ، في حينِ تُمثِّلُ المعادلةُ $y = x^2 - 3x - 10$ طريقًا آخرَ منحنيًا داخلَ المدينةِ نفسِها. هلْ يتقاطعُ هذانِ الطريقانِ أمْ لا؟

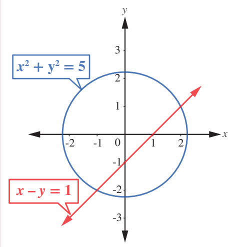
يُمكِنُني حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ باستعمالِ طريقةِ التعويضِ، وذلكَ بكتابةِ أحدِ المُتغيِّريْنِ في المعادلةِ الخطِّيةِ بدلالةِ الآخرِ، ثمَّ تعويضِهِ في المعادلةِ التربيعيةِ وحَلِّها.

مثال 1

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$x - y = 1$$
$$x^2 + y^2 = 5$$

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra)، أوْ حاسبةٍ بيانيةٍ، لتمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ كما في التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ. أُلاحِظُ أنَّ منحنيَي المعادلتيْنِ يتقاطعانِ في نقطتيْنِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:



الْخُطْوَةُ 1 أكتبُ المعادلةَ الخطِّيَّةَ بالصورةِ القياسيَّةِ.

المعادلةُ الخطِّيةُ	$x - y = 1$
بكتابةِ y بدلالةِ x	$y = x - 1$

الْخُطْوَةُ 2 أُعوِّضُ قيمةَ y من المعادلةِ الخطِّيَّةِ في المعادلةِ التربيعيَّةِ:

بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ	$x^2 + (x - 1)^2 = 5$
بفكِّ القوسيْنِ	$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 5$
بالتبسيطِ	$2x^2 - 2x - 4 = 0$
بالقسمةِ على 2	$x^2 - x - 2 = 0$

---

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » لماذا عُبِّر عن الطريق المستقيم بمعادلة خطية، وعن الطريق المنحني بمعادلة تربيعية؟ لأنَّ التمثيل البياني للمعادلة الخطية خط مستقيم، والتمثيل البياني للمعادلة التربيعية قطع مكافئ.
  » هل يمكن معرفة إذا كان الطريقان متقاطعين أم لا؟ نعم، يمكن معرفة ذلك عن طريق التمثيل البياني.
  » هل يمكن إيجاد نقاط تقاطع الطريقين من دون تمثيلهما بيانيًّا؟ نعم، يمكن إيجاد ذلك جبريًّا.
  » هل يمكن لحل النظام في هذه المسألة أنْ يساعد المهندسين؟ نعم، يمكن أنْ يساعدهم على تخطيط الطرق والجسور والدواوير المرورية وغير ذلك.

3 التدريس

- اكتب معادلة خطية، ثم أطلب إلى الطلبة حلها.
- اكتب معادلة تربيعية، ثم أطلب إلى الطلبة حلها بطريقتين مختلفتين (القانون العام، والتحليل).
- أُمثِّل المعادلة الخطية والمعادلة التربيعية بيانيًّا، ثم أسأل الطلبة:
  » ما عدد الحلول التي تُحقِّق المعادلة الخطية؟ كيف يمكن إيجادها من التمثيل البياني لمنحنى المعادلة؟
  » ما عدد الحلول التي تُحقِّق المعادلة التربيعية؟ كيف يمكن إيجادها من التمثيل البياني لمنحنى المعادلة؟
  » ما عدد نقاط التقاطع؟
  » ماذا تُمثِّل هذه النقاط للمنحنيين معًا؟
- أطلب إلى الطلبة اقتراح طريقة جبرية لإيجاد نقاط التقاطع.
- أمنح الطلبة (3–2) دقائق لمحاولة حل السؤال جبريًّا.

مثال 1

- أبدأ بشـــرح المثال 1 الذي يتنـــاول حل نظام معادلات له حلان مختلفـــان، ثم أكتب على اللوح خطوات الحل بصورة واضحة.
- أحل المعادلة التربيعة على اللوح باستعمال التحليل إلى العوامل.
- أُنبِّه الطلبة إلى ضرورة التعويض في المعادلتين للتحقُّق من صحة الحل، ثم أطلب إليهم ذكر مثال علـى زوج مرتب يُحقِّق معادلة دون الأخرى، مثل: **(4, 3)** الذي يُحقِّق **المعادلة الخطية** فقط، أو **(1, 2)** الذي يُحقِّق **المعادلة التربيعية**.
- أُخبِر الطلبـــة أنَّه يوجد حلان للنظام، وأنَّ ذلك يتوافق مع التمثيـــل البياني للنظام، ثم أكتب على اللوح الحلين في أزواج مرتبة واضحة.

إرشادات:

- في المثال 1، أُوجِّه الطلبة إلى اســـتعمال الأقواس في خطوة التعويض، وأُحفِّزهم على كتابة كل خطوة من خطوات الحل بوضوح.
- أُرشِـــد الطلبة إلى إيجاد المُميِّز للمعادلة التربيعيـــة؛ لتحديد عدد حلولها، ثم تحديد عدد حلول النظام.
- أُبيِّن للطلبة أنَّه يمكن جعل x موضوعًا للقانون بدلًا من y.
- في المثـــال 1، أُذكِّر الطلبة بكيفية تحليـــل المعادلة التربيعية، وعلاقة إشـــارة كلٍّ من الحد الأوسط والحد الأخير فيها بالإشارات داخل أقواس التحليل.

ملاحظاتي

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حـل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

أخطاء شائعة:

- قد يُخطِئ بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط في التمييز بين المعادلة الخطية والمعادلة التربيعية؛ لذا، أُوجِّههم باستمرار.
- قد يُخطِئ بعض الطلبة في إشارات الحدود عند إعادة ترتيب المعادلة الخطية؛ لذا أُنبِّههم إلى هذا الخطأ باستمرار، وأجعلهم يعتادون التحقُّق.

الخُطوةُ 3 أحلُّ المعادلةَ الناتجةَ باستعمالِ التحليلِ:

بالتحليلِ $(x+1)(x-2)=0$

خاصيَّةُ الضربِ الصفريِّ $x+1=0$ or $x-2=0$

بحلِّ المعادلتَين $x=-1$ or $x=2$

الخُطوةُ 4 أُعوِّضُ قيمةَ x لإيجادِ قيمةِ y:

الحالةُ الأولى: عندما $x=-1$:

$y=x-1$

بتعويضِ $x=-1$ في المعادلةِ الخطِّيةِ $y=-1-1=-2$

الحَلُّ الأوَّلُ: $(x, y)=(-1, -2)$.

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ الأوّلِ، أُعوِّضُ الزوجَ المُرتَّبَ $(-1, -2)$ في كلٍّ منَ المعادلةِ الخطِّيةِ والتربيعيةِ:

بالتعويضِ في المعادلةِ الخطِّيةِ $x-y=-1-(-2)=1$ ✓

بالتعويضِ في المعادلةِ التربيعيةِ $x^2+y^2=(-1)^2+(-2)^2=1+4=5$ ✓

الحالةُ الثانيةُ: عندما $x=2$:

بتعويضِ $x=2$ في المعادلةِ الخطِّيةِ $y=2-1=1$

الحَلُّ الثاني: $(x, y)=(2, 1)$.

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ الثاني، أُعوِّضُ الزوجَ المُرتَّبَ $(2,1)$ في كلٍّ منَ المعادلةِ الخطِّيةِ والتربيعيةِ:

بالتعويضِ في المعادلةِ الخطِّيةِ $x-y=2-1=1$ ✓

بالتعويضِ في المعادلةِ التربيعيةِ $x^2+y^2=(2)^2+(1)^2=4+1=5$ ✓

أتذكَّرُ

توجدُ طرائقُ عِدَّةٌ لِحَلِّ معادلةٍ تربيعيةٍ، منْها: التحليلُ إلى العواملِ، والقانونُ العامُّ.

إرشادٌ

يجبُ تعويضُ الحَلِّ في كلتا معادلتَي النظامِ؛ لكيلا يكونَ الحَلُّ غيرَ صحيحٍ، بحيثُ يُحقِّقُ إحدى المعادلتَيْنِ منْ دونِ الأُخرى.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثُمَّ أَتَحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: (2, 8), (-9, 30)

$2x+y=12$

$y=x^2+5x-6$

يوجدُ حَلّانِ لنظامِ المعادلاتِ في المثالِ السابقِ. ولكنْ، هلْ يوجدُ نظامُ معادلاتٍ لهُ حَلٌّ واحدٌ؟ لمعرفةِ الإجابةِ، أدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 2

- أبدأ بشــرح المثال 2 الذي يتناول حــل نظام له حل واحــد، ثم أكتب على اللوح خطــوات الحل بصورة واضحة.
- حل المعادلة التربيعية مُستعمِلًا القانون العام.
- أُخبِر الطلبة أنه يوجد للنظام حل واحد فقط، وأنَّ ذلك يتوافق مع التمثيل البياني للنظام.
- أكتب على اللوح الحل في زوج مرتب واضح.
- أُنبِّــه الطلبة إلى ضــرورة التعويض فــي المعادلتين للتحقُّــق من صحة الحل، ثم أطلــب إليهم ذكر مثال على زوج مرتب يُحقِّق معادلة دون الأخرى.
- قد يواجه بعــض الطلبة صعوبات في حســاب قيمة المُميِّز؛ لذا أُذكِّرهم بصيغتــه الرياضية، مُؤكِّدًا أهمية كتابة المعادلة التربيعية بالصورة الآتية:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

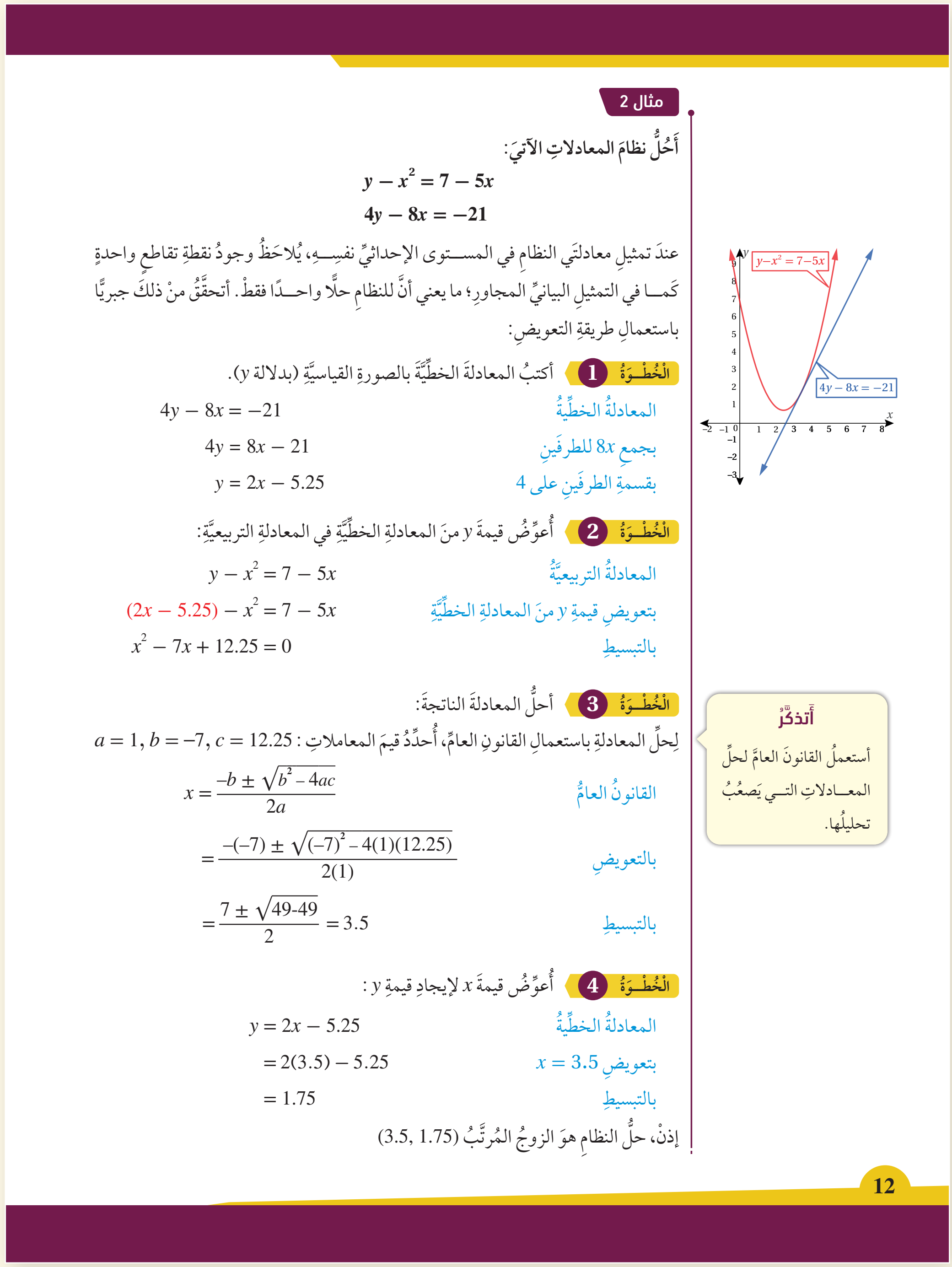
ليسهل عليهم تحديد قيمة كل معامل بصورة صحيحة.

ثم أُذكِّرهم بالحالات الثلاث:

المُميِّز > 0: يوجد حلان حقيقيان.

المُميِّز $= 0$: يوجد حلان مُتماثِلان (حل حقيقي).

المُميِّز < 0: لا توجد حلول حقيقية.



مثال 2

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$y - x^2 = 7 - 5x$$
$$4y - 8x = -21$$

عندَ تمثيلِ معادلتَي النظامِ في المســتوى الإحداثيِّ نفسِــهِ، يُلاحَظُ وجودُ نقطةِ تقاطعٍ واحدةٍ كَمــا في التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حلًّا واحــدًا فقطْ. أتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

الخُطْـوَةُ 1 أكتبُ المعادلةَ الخطِّيَّةَ بالصورةِ القياسيَّةِ (بدلالةِ y).

المعادلةُ الخطِّيَّةُ	$4y - 8x = -21$
بجمعِ $8x$ للطرفَينِ	$4y = 8x - 21$
بقسمةِ الطرفَينِ على 4	$y = 2x - 5.25$

الخُطْـوَةُ 2 أُعوِّضُ قيمةَ y منَ المعادلةِ الخطِّيَّةِ في المعادلةِ التربيعيَّةِ:

المعادلةُ التربيعيَّةُ	$y - x^2 = 7 - 5x$
بتعويضِ قيمةِ y منَ المعادلةِ الخطِّيَّةِ	$(2x - 5.25) - x^2 = 7 - 5x$
بالتبسيطِ	$x^2 - 7x + 12.25 = 0$

الخُطْـوَةُ 3 أحُلُّ المعادلةَ الناتجةَ:

لِحلِّ المعادلةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أُحدِّدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 1, b = -7, c = 12.25$

القانونُ العامُّ	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
بالتعويضِ	$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12.25)}}{2(1)}$
بالتبسيطِ	$= \frac{7 \pm \sqrt{49-49}}{2} = 3.5$

أتذكَّرُ

أستعملُ القانونَ العامَّ لحلِّ المعــادلاتِ التــي يَصعُبُ تحليلُها.

الخُطْـوَةُ 4 أُعوِّضُ قيمةَ x لإيجادِ قيمةِ y:

المعادلةُ الخطِّيَّةُ	$y = 2x - 5.25$
بتعويضِ $x = 3.5$	$= 2(3.5) - 5.25$
بالتبسيطِ	$= 1.75$

إذنْ، حلُّ النظامِ هوَ الزوجُ المُرتَّبُ $(3.5, 1.75)$

12

إرشاد: في بند (أتحقَّق من فهمي) للمثال 2، أُرشِد الطلبة إلى استعمال مُميِّز المعادلة التربيعية للتأكُّد أنَّ لها حــلًّا وحيدًا، مُنوِّهًا دائمًا بتأثير ذلك في عدد حلول النظام.

مثال 3

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أُعطي كل مجموعة رقمًا.
- أُوجِّه أفراد المجموعات ذوات الأرقام الفردية إلى حل المثال بجعل x موضوعًا للقانون، ثم أُوجِّه أفراد المجموعات ذوات الأرقام الزوجية إلى حل المثال نفسه بجعل y موضوعًا للقانون.
- أتجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أُناقِش الطلبة في إجاباتهم، بطرح الأسئلة الآتية:
  » ما عدد حلول المعادلة التربيعية الناتجة؟ أُبرِّر إجابتي. لا يوجد حل للمعادلة؛ لأنَّ مُميِّزها صفر.
  » هل يوجد حل للنظام؟ أُبرِّر إجابتي. لا، لا يوجد حل للنظام؛ لأنَّه لا يوجد حل للمعادلة التربيعية الناتجة من استعمال طريقة التعويض.
  » هل يُؤثِّر المتغير الذي أجعله موضوعًا للقانون في حل النظام؟ أُبرِّر إجابتي. لا، لا يُؤثِّر؛ لأنَّ جعل x أو y موضوعًا للقانون يُنتِج معادلة مُميِّزها سالب.
- أطلب إلى الطلبة اقتراح حلول وتعويضها في المعادلتين للتحقُّق من عدم وجود حل للنظام.
- أُؤكِّد عدم وجود حل للنظام باستعمال التمثيل البياني الموجود.

تنويع التعليم:

- أُوجِّه الطلبة ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط إلى حل النظام الآتي:

$$xy = 2$$
$$y = x + 1$$
$$(1, 2), (-2, -1)$$

إرشاد: في المثال 3، ألفت انتباه الطلبة إلى التحقُّق من صحة الحل باستعمال برمجية جيوجبرا (في البيت، أو في مختبر الحاسوب، أو باستعمال الهواتف الذكية).

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاور، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$y = 2x + 1$$
$$x^2 + y^2 = 10$$

$(1, 3)$, $(-1.8, -2.6)$

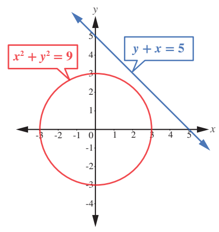
لاحظْتُ في المثالَيْنِ السابقَيْنِ وجودَ حَلٍّ أوْ حَلَّيْنِ لنظامِ المعادلاتِ. ولكنْ، هلْ توجدُ أنظمةُ معادلاتٍ ليسَ لها حَلٌّ؟ لمعرفةِ الإجابةِ، أَدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 3

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$y + x = 5$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

يَتبيَّنُ منَ التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ أنَّ منحنيَي المعادلتيْنِ لا يتقاطعانِ في أيِّ نقطةٍ؛ ما يعني عدمَ وجودِ حَلٍّ لنظامِ المعادلاتِ. أتَحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:



المعادلةُ الخطِّيةُ	$y + x = 5$
بكتابةِ x بدلالةِ y	$x = 5 - y$
بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ التربيعيةِ	$(5-y)^2 + y^2 = 9$
بإيجادِ المفكوكِ	$25 - 10y + y^2 + y^2 = 9$
بالتبسيطِ	$2y^2 - 10y + 16 = 0$

بعدَ ذلكَ أَجِدُ قيمةَ المُميِّزِ $\Delta = b^2 - 4ac$ لتحديدِ إذا كانَ للمعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ حَلٌّ أمْ لا، أُحدِّدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 2, b = -10, c = 16$، وبالتعويضِ في صيغةِ المُميِّزِ ينتجُ:

$$\Delta = (-10)^2 - 4(2)(16) = -28$$

قيمةُ المُميِّزِ سالبةٌ. إذنْ، لا يوجدُ حَلٌّ للمعادلةِ. ومنهُ لا يوجدُ حَلٌّ لهذا النظامِ.

أَتذكَّرُ

يعتمدُ عددُ جذورِ المعادلةِ وأنواعُها على قيمةِ المُميِّزِ الذي يُرمَزُ إليهِ بالرمزِ (Δ)، حيثُ:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

أَتذكَّرُ

لا يوجدُ عددٌ حقيقيٌّ مربَّعُهُ عددٌ سالبٌ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاور: لا يوجد حل للنظام.

$$x - y = 0$$
$$y = x^2 + 3x + 2$$

أخطاء شائعة:

في المثال 3، قد يحسب بعض الطلبة الجذر التربيعي لعدد سالب، مثل $\sqrt{-4} = -2$؛ لذا أُذكِّرهم بمفهوم الجذر التربيعي للعدد، وأطلب إليهم ذكر مثال على عدد يُضرَب في نفسه، ويكون ناتجه سالبًا؛ لإقناعهم بأنَّ ذلك غير ممكن.

عددُ حلولِ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ

نتيجةٌ

لأيِّ نظـامٍ يتكوَّنُ منْ معادلــةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ، تكونُ واحدةٌ مــنَ العباراتِ الآتيةِ صحيحةً:

1 وجودُ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ. 2 وجودُ حَلٍّ واحدٍ فقطْ. 3 عدمُ وجودِ حَلٍّ.

توجدُ تطبيقاتٌ حياتيةٌ كثيرةٌ لِحَلِّ الأنظمةِ التي تتكوَّنُ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ.

معلومةٌ

قدْ تســتغرقُ صناعةُ السَّجّادةِ اليدويةِ الصغيرةِ 4 أشــهرٍ منَ العملِ المُتواصِلِ.

مثال 4: من الحياة

سَــجّادةٌ مصنوعــةٌ يدويًّــا، مجمــوعُ بُعْدَيْهــا 7 m، وطــولُ قُطْرِهــا 5 m. أَجِــدُ كُلًّا مــنْ طولِها، وعرضِها.

لإيجادِ بُعْدَيِ السَّجّادةِ، أكتبُ نظامَ معادلاتٍ يُمثِّلُ المسألةَ، ثمَّ أَحُلُّهُ.

أفترضُ أنَّ طولَ السَّــجّادةِ هوَ x، وأنَّ عرضَهــا هوَ y، وبما أنَّ مجموعَ بُعْدَيِ السَّــجّادةِ هوَ 7 m، فإنَّ: $x + y = 7$، وبما أنَّ قُطْرَ السَّــجّادةِ هوَ 5 m، فإنَّ (باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس): $x^2 + y^2 = 25$، إذنْ، أصبحَ لدينا نظامٌ يتكوَّنُ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ.

$$y + x = 7$$
$$x^2 + y^2 = 25$$

والآنَ، سأَحُلُّ النظامَ باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

المعادلةُ الخطِّيةُ	$x + y = 7$
بكتابةِ y بدلالةِ x	$y = 7 - x$
بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ	$x^2 + (7 - x)^2 = 25$
بالتبسيطِ	$2x^2 - 14x + 24 = 0$
بالقسمةِ على 2	$x^2 - 7x + 12 = 0$

أَحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ بالتحليلِ إلى العواملِ:

بالتحليلِ	$(x - 4)(x - 3) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$x - 4 = 0$ or $x - 3 = 0$
بحَلِّ كلِّ معادلةٍ	$x = 4$ or $x = 3$

أتذكَّرُ

أتحقَّقُ مــنْ صِحَّةِ التحليلِ باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ.

مثال 4: من الحياة

- أُلخِّص حالات حلول نظـام مُكوَّن من معادلة خطية ومعادلة تربيعية، ثم أُناقِش الطلبة فيها، وأسألهم:
  - » هل يوجد نظــام من معادلتين خطيــة وتربيعية له ثلاثة حلول؟
  - » لماذا؟
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟

لا، لا يوجــد نظام من معادلتيــن خطية وتربيعية له ثلاثة حلول، ويُمكِن تقديــم التبرير عن طريق الرسم.

- أُوجِّه الطلبــة إلى قراءة المســألة في المثــال 4، ثم أسألهم:
  - » مَنْ لديه معلومات عن صناعة السجاد في الأردن، وفي العالَم؟
- أبدأ بشرح المثال، ثم أكتب على اللوح خطوات الحل بصورة واضحة، مُركِّزًا على كيفية تحديد المتغيرات، وتكوين المعــادلات، وتدريب الطلبــة على تحديد معطيات المسألة.
- أكتب على اللــوح نظام المعادلات الــذي يُعبِّر عن المسألة، ثم أُوجِّه الطلبة إلى حله.

أخطاء شائعة:

فــي المثال 4، قد يُخطِئ بعض الطلبة بعدم اســتثناء القِيَم السالبة من الحل؛ لذا أُذكِّرهم أنَّ قِيَم x، وy هنا تُمثِّل طول السجادة وعرضها.

إرشـاد: أُذكِّر الطلبة بنظرية فيثاغورس قبل البدء بحل التدريب في بند (**أتحقَّق من فهمي**).

4 التدريب

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1–15) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنَّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

إرشـاد: أُذكِّر الطلبة بقانوني محيط الدائرة، ومساحة الدائرة قبل البدء بحل السؤال 15.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 16, 18 كتاب التمارين: (1–13)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 17, 19 كتاب التمارين: (7 – 15)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (19 – 22) كتاب التمارين: (15 – 17)

أُعوِّضُ قيمَ x في المعادلةِ الخطِّيةِ لإيجادِ قيمِ y:

بتعويضِ قيمةِ $x = 3$ في المعادلةِ الخطِّيةِ $y = 7 - 3$

قيمةُ y الأولى $y = 4$

بتعويضِ قيمةِ $x = 4$ في المعادلةِ الخطِّيةِ $y = 7 - 4$

قيمةُ y الثانيةُ $y = 3$

إذن، حَلُّ النظامِ هوَ: $(4, 3)$ وَ $(3, 4)$.

بما أنَّ طولَ السَّجّادةِ أكبرُ منْ عرضِها، فإنَّ الطولَ هوَ 4 m، والعرضَ هوَ 3 m

أتحقق من فهمي

مزرعةٌ مستطيلةُ الشكلِ، طولُ قُطْرِها 50 m، ومحيطُها 140 m. أَجِدُ بُعْدَيِ المزرعةِ. أنظر الهامش.

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y = x^2 + 4x - 2$, $y + 6 = 0$ (-2, -6)

2) $y = x^2 + 6x - 3$, $y = 2x - 3$ (0, -3), (-4, -11)

3) $y = x^2 + 4$, $x - y = -1$ لا يوجد حل للنظام.

4) $y = x^2 + 4x - 1$, $7x + 2y = 6$ (0.5, 1.25), (-8, 31)

5) $y = x^2 + 4x + 7$, $y - 3 = 0$ (-2, 3)

6) $y = x^2 - 2x + 4$, $y = x$ لا يوجد حل للنظام.

7) $x^2 + y^2 = 34$, $2x - y = 1$ (3, 5), (-2.2, -5.4)

8) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = 0$ (-1, 0)

9) $x^2 + y^2 = 4$, $x + y = 5$ لا يوجد حل للنظام.

10) $x^2 + y^2 = 10$, $x - y = 2$ (-1, -3), (3, 1)

11) $x^2 + (y - 1)^2 = 17$, $x = 1$ (1, -3), (1, 5)

12) $2x + 3y = 5$, $2y^2 + xy = 12$ (14.5, -8), (-2, 3)

13) **بركةٌ**: بركةُ ماءٍ قاعدتُها مستطيلةُ الشكلِ، ومحيطُها 16 m، والفرقُ بينَ مربَّعَيْ بُعْدَيْها $16\ m^2$. أَجِدُ بُعْدَيْها. أنظر الهامش.

14) **أعدادٌ**: أَجِدُ العددَيْنِ الموجبَيْنِ اللذَيْنِ مجموعُهُما 12، والفرقُ بينَ مربَّعَيْهِما 24 أنظر الهامش.

15) **هندسةٌ**: دائرتانِ مجموعُ محيطَيْهِما 12π cm، ومجموعُ مساحتَيْهِما $20\pi\ cm^2$. أَجِدُ قُطْرَ كلٍّ منْهُما. أنظر الهامش.

إجابات الأسئلة:

(**أتحقَّق من فهمي 4**): أفترض أنَّ طول المزرعة هو x، وأنَّ عرضها هو y:

$$x^2 + y^2 = 2500$$
$$2x + 2y = 140$$
$$\Rightarrow (x, y) = (40, 30)$$

13) أفترض أنَّ الطول هو x ، وأنَّ العرض هو y:

$$2x + 2y = 16$$
$$x^2 - y^2 = 16$$

الحل: $(5, 3)$

14) أفترض أنَّ العدد الأول هو x، وأنَّ العدد الثاني هو y:

$$x + y = 12$$
$$x^2 - y^2 = 24$$

الحل: $(7, 5)$

15) نصف قُطْر الدائرة الأولى r_1 ، ونصف قُطْر الدائرة الثانية r_2:

$$2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 12\pi$$
$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 20\pi$$
$$r_1 = 2,\ r_2 = 4$$

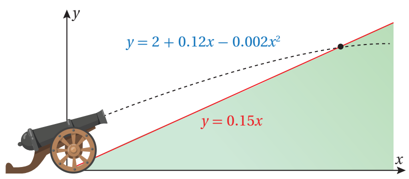
إذن، طول قطر الدائرة الأولى هو 4 cm، وطول قطر الدائرة الثانية هو 8 cm

16 **أعمارٌ:** قالَتْ شيماءُ: «عُمْري أكبرُ بأربعِ سنواتٍ منْ عُمْرِ أخي ريّانَ، ومجموعُ مُربَّعَيْ عُمْرَيْنا هوَ 346 عامًا». ما عُمْرُ شيماءَ؟ أنظر ملحق الإجابات.

17 **لوحةٌ:** لوحةٌ مستطيلةُ الشكلِ، طولُها يساوي مِثْلَيْ عرضِها، وطولُ قُطْرِها $\sqrt{1.25}$ m ، أُحيطَ بها إطارٌ، تكلفةُ المترِ الطوليِ الواحدِ منْهُ بالدينارِ 2.25 . أَجِدُ تكلفةَ الإطارِ.
أنظر ملحق الإجابات.

18 **زراعةٌ:** قسَّمَ فيصلٌ $41m^2$ منْ مزرعتِهِ إلى منطقتيْنِ مربَّعتَي الشكلِ، ثمَّ زرعَهُما بمحصولَي الطماطمِ والبطاطا. إذا زادَ بُعْدُ المنطقةِ المزروعةِ بالطماطمِ مترًا واحدًا على بُعْدِ المنطقةِ المزروعةِ بالبطاطا، فما مساحةُ المنطقةِ المزروعةِ بكلِّ محصولٍ؟ أنظر ملحق الإجابات.

19 تُمثِّلُ المعادلةُ $y = 2 + 0.12x - 0.002x^2$ مسارَ قذيفةِ مِدفعٍ تمَّ إطلاقُها نحوَ تلَّةٍ. أجِدُ إحداثيّاتِ النقطةِ التي اصطدمتْ عندَها القذيفةُ بسفحِ التلَّةِ؛ إذا علمتُ أنَّهُ مستقيمٌ ومعادلتُهُ $y = 0.15x$.
أنظر ملحق الإجابات.

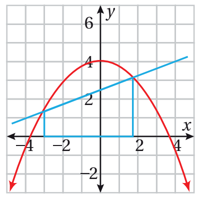


مهارات التفكير العليا 22–20 أنظر ملحق الإجابات.

20 **تبريرٌ:** صُمِّمَتْ نافورةٌ بصورةٍ يخرجُ منْها الماءُ بحسبِ العلاقةِ: $y + x^2 = 10$، إذا وُضِعَتْ وحدةُ إنارةٍ على المستقيمِ الذي معادلتُهُ: $y = 12 + x$، فهلْ يصلُ ماءُ النافورةِ إلى وحدةِ الإنارةِ؟

21 **تحدٍّ:** إذا علمْتُ أنَّ المعادلةَ الخطِّيَّةَ: $y = 3x + p$ تقطعُ المنحنى: $y = 2x^2 + 3x - 5$ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، فما قيمةُ p؟

22 **تحدٍّ:** أجِدُ مساحةَ شبهَ المنحرفِ المرسوم باللونِ الأزرقِ أسفلَ مُنحنى الاقترانِ $y = -0.3x^2 + 4$ في الشكلِ المجاورِ.



مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (22 –20).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية مــن الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:

$$xy = 2 \qquad y = x + 1$$

نشاط التكنولوجيا:

- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في شــبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيق حياتي على نظام مُكوَّن من معادلة خطية وأخرى تربيعية، وحله.
- أُنبِّه الطلبة إلى ضرورة توثيق مصدر المعلومة دائمًا.

تعليمات المشروع:

- أُوجِّه الطلبة إلـــى البحث في شــبكة الإنترنت عن صور لنماذج حياتية تظهر فيها منحنيات ومســتقيمات متقاطعة (مثل: الجســور، ونوافيــر المياه، وخرائــط الطرق)، أو التقاط صور لذلك، ثم حفظها في ملف بجهاز الحاسوب.
- أطلب إليهم استعمال برمجية جيوجيبرا لإيجاد معادلة كل مــن المنحنيات المتقاطعة التــي تظهر في الصور المخزنة.
- أُذكِّرهــم بضرورة توثيــق خطوات تنفيذ المشــروع بالطرائــق التي يرونها مناســبة، مثــل خاصية طباعة الشاشة.

6 الختام

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات.
- أُحضِــر صندوقين، الأوَّل يحوي عِــدَّة بطاقات كُتِب على كلٍّ منهــا معادلة خطيــة، والثاني يحــوي عِدَّة بطاقات كُتِب على كلٍّ منها معادلة تربيعية.
- أطلب إلى أفراد كل مجموعة تحديد مُمثِّل لها؛ ليختار بطاقــة من كل صنــدوق، ثم يحل أفــراد المجموعة النظام المُكوَّن من المعادلتين بأسرع وقت ممكن.
- ألفت انتبــاه أفــراد كل مجموعة إلــى إمكانية إعادة اختيار بطاقة واحدة فقط من أحد الصندوقين في حال حصلوا على نظام ليس له حل.

الدرس 2

فكرة الدرس

- حل نظام مُكوَّن من معادلتين تربيعيتين بمتغيرين.
- تعرُّف عدد الحلول الممكنة لنظام مُكوَّن من معادلتين تربيعيتين.
- حل مسائل رياضية وحياتية على أنظمة المعادلات.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- حل نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين.
- حل معادلة تربيعية بالقانون العام والتحليل.
- حل نظام مُكوَّن من معادلة خطية ومعادلة تربيعية.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أُذكِّر الطلبة بمفهوم كلٍّ من نظام المعادلات، وحل النظام، ثم أُذكِّرهم بعدد الحلول التي يمكن إيجادها عند حل نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين بيانيًّا، وارتباطها بوضع المستقيمين في المستوى الإحداثي (حل واحد في حالة التقاطع، وعدم وجود حلول في حالة التوازي، وعدد لانهائي من الحلول في حالة تطابق المستقيمين)، ثم أُذكِّرهم بعدد الحلول الممكنة في حالة النظام المُكوَّن من معادلة تربيعية وأخرى خطية (عدم وجود حل، أو وجود حل واحد، أو وجود حلين). بعد ذلك أرسم على اللوح تمثيلات تقريبية تُوضِّح الحالات الثلاث.

الدرس 2

حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ

Solving a System of Two Quadratic Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ بمُتغيِّريْنِ.

مسألةُ اليومِ استعملَتْ خبيرةُ تسويقِ المعادلتيْنِ التربيعيتيْنِ الآتيتيْنِ لتمثيلِ مقدارِ كلٍّ منَ العرضِ والطلبِ لسلعةٍ تجاريةٍ؛ بُغْيَةَ تحديدِ نقاطِ التوازنِ التي يتساوى عندَها العرضُ معَ الطلبِ في السوقِ، حيثُ يُمثِّلُ x سعرَ الوحدةِ، ويُمثِّلُ y عددَ الوحداتِ المبيعةِ. هلْ يُمكِنُني مساعدةُ الخبيرةِ على تحديدِ نقاطِ التوازنِ؟

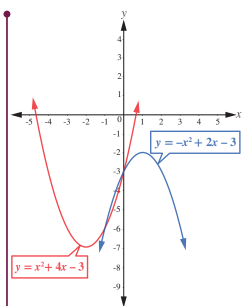
$$y = x^2 + 6x$$
$$y = -x^2 + 24x$$

لِحَلِّ نظامٍ يتكوَّنُ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ، تُساوى أوَّلًا المعادلتانِ بعضُهُما ببعضٍ لتكوينِ معادلةٍ تربيعيةٍ واحدةٍ.

مثال 1

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$\mathbf{y = x^2 + 4x - 3}$$
$$\mathbf{y = -x^2 + 2x - 3}$$



عندَ تمثيلِ معادلتَيِ النظامِ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، يُلاحَظُ أنَّ منحنييْهِما يتقاطعانِ في نقطتيْنِ كما في الشكلِ المجاورِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ:

بمساواةِ المعادلتيْنِ: $x^2 + 4x - 3 = -x^2 + 2x - 3$

بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، والتبسيطِ: $2x^2 + 2x = 0$

أَحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ الناتجةَ باستعمالِ التحليلِ:

بتحليلِ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ: $2x\,(x + 1) = 0$

حَلّا المعادلةِ: $x = 0$ or $x = -1$

لإيجادِ قيمةِ y، أُعوِّضُ قيمتَيْ x في أيٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ:

أَتذكَّرُ

يُمكِنُني حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ أيضًا.

- أطلب إلى أحد الطلبة كتابة معادلة تربيعية على اللوح، ثم أكتب المعادلة: $x^2 + y^2 = 9$، مُوضِّحًا لهم أنَّه تكوَّن لدينا نظام من معادلتين، ثم أسألهم:
  » ما اسم نظام المعادلات الذي أمامكم على اللوح؟
  » كيف يمكن حله؟
- أستمع لإجابات أكبر عدد من الطلبة، وأسألهم دائمًا: مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟ لماذا؟ مَنْ لديه إجابة أخرى؟ ما هذه الإجابة؟ وذلك لتعزيز مهارات التواصل لدى الطلبة (التعبير عن الرأي، واحترام الرأي الآخر). بعد ذلك أُخبِرهم أنَّهم سيتعرَّفون حل مثل هذا النظام في هذا الدرس، ثم أكتب عنوانه على اللوح.

ملاحظاتي

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم).
- أكتب على اللوح المعادلتين الواردتين في المسألة، أسأل الطلبة:
  - » ما نوع المعادلات في هذا النظام؟ معادلتان تربيعيتان.
  - » كيف يمكن حل هذا النظام؟ بتعويض قيمة y من الأولى في الثانية، أو حذف y من المعادلتين، ثم حل المعادلة الناتجة.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

3 التدريس

- أطرح السؤال الآتي على الطلبة:
  - » إذا تكـوَّن نظام المعادلات المـراد حله من معادلتين تربيعيتين – مثل الحالة التي في مسـألة اليوم – فما عدد الحلول الناتجة؟ لماذا؟
- أمنـح الطلبة بعض الوقت لتقديم إجاباتهم وتبريرها. وإذا أجاب أحدهم إجابة مُعيَّنة (لها حلان مثلًا)، فأطلب إليه توضيح إجابته بتمثيل بياني تقريبي.
- أُوضِّح للطلبة أنَّ إيجاد إحداثيي نقاط التقاطع (إنْ وُجِدت) بالطرائق الجبرية هو ما سيتعلَّمونه في هذا الدرس، وأنَّ إحداثيات نقاط التقاطع هي الحلول الممكنة للنظام.

مثال 1

- أُناقِـش على اللوح حل المثال 1 الذي يُوضِّح طريقة حل نظام مُكوَّن من معادلتين تربيعيتين لهما حلان مختلفان، مراعيًا تبرير كل خطوة.
- أُنبّـه الطلبة –بعد خطوة مسـاواة المعادلتين معًا– إلى أهمية جعل الطـرف الأيمن من المعادلة يسـاوي صفرًا وتجميع الحدود المتشابهة في الطرف الأيسر منها (أو العكس)؛ لكي يتمكَّنوا من حل المعادلة التربيعية، مُؤكِّدًا أنَّه لا فرق بين جعل الطرف الأيمن أو الطرف الأيسـر من المعادلة يساوي صفرًا.
- أُذكّر الطلبة بإخراج العامل المشترك بوصفه طريقة لتحليل المقادير الجبرية.
- أُؤكِّد للطلبة وجود حلين للنظام عن طريق التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب، مشيرًا إلى الحلول على التمثيل البياني (يمكِني رسم شكل تقريبي على اللوح).

التقويم التكويني:

- أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق مِــن فهمي**) بعد كل مثال، ثــم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشــتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

أخطاء شائعة:

في بند (**أتحقَّق من فهمــي**)، قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في جعل أحد طرفي المعادلة يساوي صفرًا، فيحذفون -مثــلًا- x^2 و $-x^2$؛ لذا أؤكِّد باســتمرار وجوب إضافة النظير الجمعي إلى الحدود في طرفي المعادلة.

مثال 2: من الحياة

- أسأل الطلبة:
  - » أيُّكم يركب درّاجة؟
  - » ماذا تعرفون عن سباقات المراحل؟
- أستمع لإجابات أكبر عدد من الطلبة، وأُحفزهم على الحديث عــن تجاربهم الشــخصية؛ لتعزيز مهارات التواصل لديهم.
- أُناقِش الطلبة في مسألة السباقات الواردة في المثال 2، مُؤكِّدًا أنَّ تطبيقات أنظمة المعادلات التربيعية مُتعدِّدة في حياتنا.
- أُناقِش الطلبة في حل المثــال الذي يعرض حل نظام من معادلتين تربيعيتين له حل واحد.
- أُنبِّه الطلبة - بعد خطوة مســاواة المعادلتين معًا- إلى إمكانيــة التخلُّص من الحد x^2 مــن الطرفين (بإضافة النظير الجمعي)، ثم تجميع الحدود التي تحوي x في الطرف الأيسر، ثم أسألهم:
  - » كم عدد حلول النظــام؟ لماذا؟ عدد حلول النظام هو حل واحد؛ لأنَّه ينتج من المعادلة الخطية حل واحد فقط.
- أســتعمل التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب للتحقُّق مــن صحة الحل، وتأكيــد وجود حل واحد للنظام، ثــم أكتب الحل في صــورة زوج مرتب عند نقطة التقاطع (يمكن رسم منحنيي المعادلتين بصورة تقريبية على اللوح).

الحالةُ الأولى: إذا كانَتْ $x = 0$:

بتعويضِ $x = 0$ في إحدى المعادلتيْنِ $\quad y = -(0)^2 + 2(0) - 3$

بالتبسيطِ $\quad y = -3$

إذنْ، الحَلُّ الأولُ للنظامِ هوَ: $(x, y) = (0, -3)$.

الحالةُ الثانيةُ: إذا كانَتْ $x = -1$:

بتعويضِ $x = -1$ في إحدى المعادلتيْنِ $\quad y = -(-1)^2 + 2(-1) - 3$

بالتبسيطِ $\quad y = -6$

إذنْ، الحَلُّ الثاني للنظامِ هوَ: $(x, y) = (-1, -6)$.

إذنْ، حلُّ النظامِ هوَ: $(0, -3), (-1, -6)$.

إرشادٌ

للتحقُّقِ منْ صِحَّــةِ الحَلِّ، أُعــوِّضُ قيمتَــيْ x وَ y في كلٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: $(1, 0), (-3, 0)$

$y = -x^2 - 2x + 3$

$y = x^2 + 2x - 3$

قَــدْ يتقاطعُ منحنيا معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ في نقطةٍ واحدةٍ فقــطْ، وعندئذٍ يكونُ لنظامِ المعادلاتِ الذي تُكوِّنُهُ هاتانِ المعادلتانِ حَلٌّ واحِدٌ.

مثال 2: من الحياة

معلومةٌ

تُجرى سباقاتُ المراحلِ على مــدارِ أيامٍ، وهــيَ تقامُ على مســاراتٍ متنوعةٍ منْ حيثُ التضاريــسُ، مثــلِ: الطرقِ المُنبسِطةِ، والطرقِ الجبليةِ.

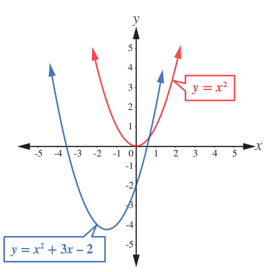
سباقاتٌ: في أحدِ سباقاتِ المراحلِ، سلكَ مُتسابِقٌ مسارًا تُمثِّلُهُ المعادلةُ التربيعيةُ: $y = x^2$ في حينِ سلكَ مُتسابِقٌ آخرُ مسارًا تُمثِّلُهُ المعادلةُ: $x^2 + 3x = y + 2$. أَجِدُ نقطةَ التقاطعِ بينَ مسارَيِ المُتسابِقيْنِ.

أكتبُ المعادلةَ $x^2 + 3x = y + 2$ بالصورةِ القياسيَّةِ (بدلالةِ y) .

بطرحِ 2 منَ الطرفَينِ $\quad x^2 + 3x - 2 = y$

باستعمالِ الخاصيَّةِ التبديليَّةِ $\quad y = x^2 + 3x - 2$

عندَ تمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشكلِ المجاورِ، يُلاحَظُ وجــودُ نقطةِ تقاطعٍ واحدةٍ بينَ منحنييْهِما؛ ما يعنــي أنَّ لنظامِ المعادلاتِ حَلًّا واحــدًا. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.



بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ:

إرشادات عامة:

- أُؤكِّد دائمًا أهمية التحقُّق من صحة الحل.
- أُؤكِّد عــدد حلول النظام الناتجــة في كل مرة، وأربــط ذلك بالخطوة المناسبة من خطوات الحل الجبري.

إرشاد: قد يتساءل بعض الطلبة عن سبب وجود مسارين مختلفين في مسألة السباقات؛ لذا أُخبِرهم أنَّ ذلك لا يعني بالضرورة اختلاف المسافة التي يقطعها كل متسابق.

$$x^2 + 3x - 2 = x^2$$ بمساواةِ المعادلتيْنِ

$$x^2 + 3x - 2 - x^2 = 0$$ بطرحِ x^2 منْ كلا الطرفيْنِ

$$3x - 2 = 0$$ بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، والتبسيطِ

$$x = \frac{2}{3}$$

بعدَ ذلكَ أجدُ قيمةَ y، وذلكَ بتعويضِ قيمةِ $x = \frac{2}{3}$ في أيٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ:

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right) - 2$$ بتعويضِ $x = \frac{2}{3}$ في المعادلةِ الثانيةِ

$$y = \frac{4}{9}$$ بالتبسيطِ

إذنْ، حلُّ نظامِ المعادلاتِ هوَ: $x = \frac{2}{3}, y = \frac{4}{9}$، ونقطةُ تقاطعِ المنحنييْنِ هيَ: $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$.

معلومةٌ

رياضةُ التزلُّجِ هيَ إحدى أسرعِ الرياضاتِ غيرِ الآليةِ؛ فقدْ تصلُ سرعةُ المُتزلِّجِ إلى 200 km/h

أتحقق من فهمي

تزلّجٌ: تُمثِّلُ المعادلةُ: $y = x^2 + 2x$ مسارَ مُتزلِّجٍ على الجليدِ، في حينِ تُمثِّلُ المعادلةُ: $y = x^2 - x + 5$ مسارَ مُتزلِّجٍ آخرَ. أبحثُ عنْ جميعِ النقاطِ التي قدْ يصطدمُ عندَها المُتزلِّجانِ إذا لمْ يكونا حذريْنِ. $\left(\frac{5}{3}, \frac{55}{9}\right)$

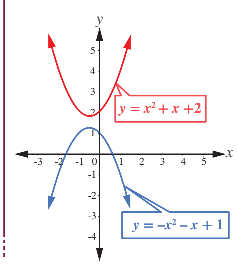
عرضْنا في المثاليْنِ السابقيْنِ أنظمةَ معادلاتٍ تربيعيةٍ لها حَلّانِ أوْ حَلٌّ واحدٌ. ولكنْ، هلْ يوجدُ دائمًا حَلٌّ للنظامِ المُكوَّنِ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ؟ أدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 3

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$y = x^2 + x + 2$$
$$y = -x^2 - x + 1$$

عندَ تمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشكلِ المجاورِ، يُلاحَظُ عدمُ وجودِ نقاطِ تقاطعٍ بينَ منحنييْهِما؛ ما يعني عدمَ وجودِ حَلٍّ لنظامِ المعادلاتِ. أتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.



بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ لإيجادِ قيمةِ x:

$$x^2 + x + 2 = -x^2 - x + 1$$ بمساواةِ المعادلتيْنِ

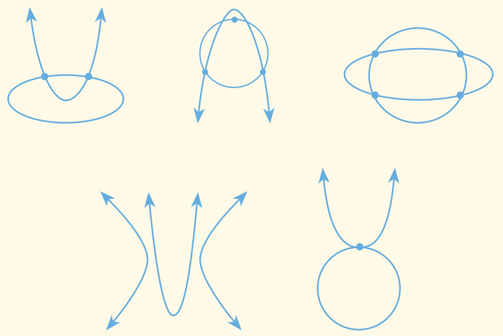
$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$ بالتبسيطِ

إرشاد:

- في المثال 3، أُؤكِّد ضرورة إيجاد قيمة المُميِّز إذا نتج من مساواة معادلتي النظام معادلة تربيعية في الصورة الآتية: $ax^2 + bx + c = 0$؛ للتأكُّد أنَّ المعادلة التربيعية ليس لها حلول حقيقية.
- للتحقُّق من صحة الحل، أطلب إلى الطلبة تمثيل منحنيي معادلتي النظام بيانيًّا باستخدام برمجية جيوجبرا.

مثال 3

- أُبيِّن للطلبة عدد الحلول التي نوقشت في المثال 1 والمثال 2، ثم أسألهم: هل تتوقَّعون وجود حالات أخرى لعدد الحلول الممكنة لنظام مُكوَّن من معادلتين تربيعيتين؟
- أستمع لإجابات الطلبة، ثم أُوضِّح لهم بالرسم على اللوح الحالات الخمس التي تُمثِّل عدد الحلول الممكنة، وهي تتراوح بين 0 (لا تقاطع)، و 4 (أربع نقاط تقاطع)، مثل الحالات في الشكل الآتي:



- أطلب إلى الطلبة رسم تمثيلات تقريبية غير تلك التي عُرِضت عليهم للحالات المختلفة لعدد الحلول الممكنة لنظام مُكوَّن من معادلتين تربيعيتين.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يعرض نظامًا من معادلتين تربيعيتين ليس له حل حقيقي.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أهمية اختبار المُميِّز للمعادلة التربيعية الناتجة، مُذكِّرًا إيّاهم أنَّه إذا كان المُميِّز أقل من صفر، فإنَّه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة التربيعية؛ ما يعني عدم وجود حل لنظام المعادلات التربيعية.
- للتحقُّق من صحة الحل، أستعمل التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب. (يمكن رسم شكل تقريبي على اللوح).

مثال 4

- يحتوي نظام المعادلات في المثال 4 على معادلتين تربيعيتين: الأولى تُمثِّل معادلة دائرة، والثانية تُمثِّل معادلة قطع مكافئ، وله أربعة حلول مختلفة.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكن حل النظام باستعمال طريقة الحذف، ثم أسألهم:
  - » أيُّهما أفضل: حذف المتغير x أم المتغير y؟ لماذا؟
- أُناقِش الطلبة في حل المثال على اللوح، وأُحفِّزهم على تبرير كل خطوة أقوم بها.
- أحل المعادلة التربيعية الناتجة عن الحذف بالتحليل إلى العوامل، ثم أسأل الطلبة:
  - » كيف يمكن التحقُّق من قابلية المعادلة للتحليل؟ أُذكِّر الطلبة بالمُميِّز.
- أحل المعادلة التربيعية الناتجة باستعمال القانون العام في الهامش، ثم أسأل الطلبة:
  - » أيُّ الطريقتين تُفضِّلون: التحليل إلى العوامل أم القانون العام؟ لماذا؟
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكن التعويض عن y في أيٍّ من معادلتي النظام للحصول على قِيَم x المقابلة.
- أكتب جميع الحلول في صورة أزواج مرتبة واضحة.
- للتحقُّق من صحة الحل، أستعمل التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب، مُعيِّنًا الحلول عليه. (يمكن رسم شكل تقريبي على اللوح).

بعدَ ذلكَ أَجِدُ قيمةَ المُميِّزِ $\Delta = b^2 - 4ac$ لتحديدِ إذا كانَ للمعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ حَلٌّ أمْ لا.

قيمُ المعاملاتِ هي: $a = 2, b = 2, c = 1$. وبالتعويضِ في صيغةِ المُميِّزِ ينتجُ:

$$\Delta = (2)^2 - 4(2)(1) = -4$$

قيمةُ المُميِّزِ سالبةٌ. إذنْ، لا يوجدُ حَلٌّ للمعادلةِ. ومنهُ لا يوجدُ حَلٌّ لهذا النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ: لا يوجد حل للنظام.

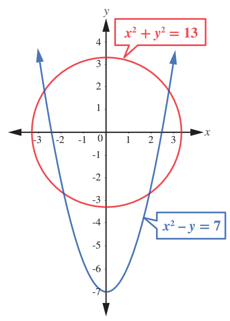
$$y = x^2 + 4$$
$$y = -x^2 + 2$$

عرضْنا في الأمثلةِ السابقةِ أنظمةً لها حَلّانِ، أوْ حَلٌّ واحدٌ، أوْ ليسَ لها حَلٌّ. ولكنْ، هلْ يوجدُ نظامٌ مُكوَّنٌ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ، لهُ ثلاثةُ حلولٍ، أوْ أربعةٌ؟ أَدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 4

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$x^2 - y = 7$$



عندَ تمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشكلِ المجاورِ، يُلاحَظُ وجودُ 4 نقاطِ تقاطعٍ بينَ منحنييْهِما؛ ما يعني وجودَ أربعةِ حلولٍ لنظامِ المعادلتيْنِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

يظهرُ المُتغيِّرُ x في كلتا المعادلتيْنِ بالقوَّةِ نفسِها؛ لذا يُمكِنُني استعمالُ الحذفِ للتخلُّصِ منْ هذا المُتغيِّرِ، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ التي تحوي مُتغيِّرًا واحدًا هوَ y:

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$(-) \quad x^2 - y = 7$$

$y^2 + y = 6$ بالطرحِ

$y^2 + y - 6 = 0$ بطرحِ 6 منْ كلا الطرفيْنِ

يُمكِنُني حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أوِ التحليلِ:

$(y + 3)(y - 2) = 0$ بالتحليلِ

إذنْ: $y = -3 , y = 2$

أُعوِّضُ قيمتَيْ y في إحدى معادلتَيِ النظامِ لإيجادِ قيمِ x:

$x^2 = -3 + 7$ بتعويضِ قيمةِ $y = -3$

أخطاء شائعة:

في المثال 4، قد يُخطِئ بعض الطلبة عند كتابة الحلول في صورة أزواج مرتبة بقلب مواضع الإحداثيين؛ نظرًا إلى اختلاف هذا المثال عن الأمثلة السابقة؛ إذ يجب إيجاد قيمة y أوَّلًا؛ لذا أُؤكِّد لهم طريقة الكتابة الصحيحة في صورة (x, y)، ثم أُوجِّههم إلى إمكانية استعمال أقلام ملونة عند كتابة الأزواج المرتبة كما هو مُبيَّن في كتاب الطالب.

الوحدةُ 1

بحَلِّ المعادلةِ $x = \pm 2$

إذنْ، $x = 2 , x = -2$

بتعويضِ قيمةِ $y = 2$ $x^2 = 2 + 7 = 9$

بحَلِّ المعادلةِ $x = \pm 3$

إذنْ، توجدُ أربعةُ حلولٍ للنظامِ، هيَ: $(-3 , -2)$ ، وَ$(-3 , 2)$، وَ $(3 , 2)$ ، وَ$(-3 , 2)$.

أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ هذهِ الحلولِ بتعويضِها في كلٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: أنظر ملحق الإجابات.

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$3y - x^2 = -12$$

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y = 2x^2 + x - 5$
$y = -x^2 - 2x - 5$
$(-1, -4), (0, -5)$

2) $y = x^2 - 4x + 1$
$y = -2x^2 - 4$
لا يوجد حل للنظام.

3) $y = x^2 + 1$
$y = 2x^2 - 3$
$(-2, 5), (2, 5)$

4) $y = x^2 + x + 1$
$y = -x^2 + x - 2$
لا يوجد حل للنظام.

5) $y = -x^2 + 5x$
$y = x^2 - 5x$
$(0, 0) ,(5, 0)$

6) $y = x^2$
$y = x^2 + x + 6$
$(-6, 36)$

7) $y = -x^2 + 6x + 8$
$y = -x^2 - 6x + 8$
$(0, 8)$

8) $x^2 + y^2 = 16$
$y = x^2 - 5$
أنظر ملحق الإجابات.

9) $5x^2 - 2y^2 = 18$
$3x^2 + 5y^2 = 17$
$(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)$

10) أَجِدُ نقاطَ التقاطعِ بينَ الدائرتيْنِ: أنظر ملحق الإجابات.

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

11) عددانِ، مجموعُ مربَّعَيْهِما 89، والفرقُ بينَ مربَّعَيْهِما 39، ما هذانِ العددانِ؟ أنظر الهامش.

21

إرشاد: أُوجِّه الطلبة إلى استعمال القانون العام والآلة الحاسبة في حل السؤالين: 8، و10.

إجابات الأسئلة:

11) أفترض أنَّ العدد الأول هو x ، وأنَّ العدد الثاني هو y:

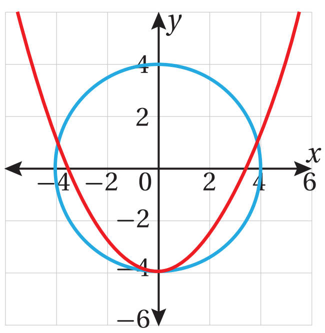
$$x^2 + y^2 = 89$$
$$x^2 - y^2 = 39$$

بحل نظام المعادلات التربيعية، ينتج:

$(8,5), (-8, 5), (8, -5), (-8, -5)$

إرشادات:

- في بنــد (**أتحقَّق من فهمي**) بعد المثــال 4، أُنبِّه الطلبة إلى ضرورة إعادة ترتيب الحدود المتشابهة أســفل بعضها عند اســتعمال طريقــة الحذف؛ ليسهل عليهم تحديد المتغير الذي سيحذفونه.
- للتحقُّق مــن صحة الحــل، أُوجِّــه الطلبة إلى تعويــض كلٍّ مــن الحلول الثلاثة فــي معادلتي النظام، ثم أعرض أمامهم التمثيل البياني المرفق.
- أُوجِّه الطلبة إلى استعمال برمجية جيوجبرا –إنْ أمكن ذلــك– للتحقُّق من صحــة الحل، حيث سيظهر الشكل الآتي:



4 التدريب

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبــة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المســائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (11–1) ضمن مجموعات ثنائية داخــل الغرفة الصفية؛ فهذه المســائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشــرًا بأمثلة الدرس، وهي تُســتعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفســها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحــد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المســألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ اســتراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تســاؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأســئلة الواردة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (19–15).
- أرصد أيَّة أفــكار غير تقليدية من الطلبــة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 12, 13, 15 كتاب التمارين: (1 – 16)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (13 – 15) كتاب التمارين: (9 – 18)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (14 – 19) كتاب التمارين: (19 – 23)

5 الإثراء

- أوجه الطلبة إلى حل النظام الآتي بوصفه إثراءً لهم:

$$xy = 6 \ , \ x^2 + y^2 = 16$$

$(3.65, 1.65), (-3.65, -1.65),$
$(1.65, 3.65), (-1.65, -3.65)$

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الإجراءات المكتوبة في الخطوة الثالثة؛ وذلك بكتابة نظام معادلات يُمثِّل منحنيين متقاطعين في كل صورة، ثم اختيار أحد هذه الأنظمة، وحلها جبريًّا، ثم التحقُّق من صحة الحل باستعمال برمجية جيوجبرا.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يُمكِنهم اختيار نظامين، وإيجاد حل كل منهما: أحدهما نظام يحوي معادلة خطية ومعادلة تربيعية، والآخر نظام يحوي معادلتين تربيعيتين.
- أُذكِّر الطلبة بضرورة توثيق خطوات تنفيذ المشروع بالطريقة التي يرونها مناسبة، مثل استعمال خاصية طباعة الشاشة.

6 الختام

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  » ماذا يعني النظام المُكوَّن من معادلتين تربيعيتين؟
  » ماذا يُقصَد بحل النظام؟
  » كم عدد الحلول الممكنة لنظام مُكوَّن من معادلتين تربيعيتين؟
- أستمع لإجابات أكبر عدد ممكن من الطلبة، ثم أسألهم:
  » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  » اذكر هذه الإجابة.

12 **فيزياءُ:** قُذِفَتْ كرتانِ رأسيًّا في الوقتِ نفسِهِ منْ موقعيْنِ مختلفيْنِ. إذا كانَتِ المعادلةُ: $y = -2t^2 + 12t + 10$ تُمثِّلُ ارتفاعَ الكرةِ الأولى بالأمتارِ بعدَ مرورِ t ثانيةٍ، وكانَتِ المعادلةُ: $y = -2t^2 + 4t + 42$ تُمثِّلُ ارتفاعَ الكرةِ الثانيةِ، فأَجِدُ الزمنَ الذي يتساوى عندَهُ ارتفاعُ كلٍّ منَ الكرتيْنِ، ثمَّ أَجِدُ ارتفاعَ كلِّ كرةٍ في تلكَ اللحظةِ. $t = 4\ sec, y = 26m$

13 **ثقافةٌ ماليةٌ:** بالعودةِ إلى مقدمةِ الدرسِ، أَستعملُ نظامَ المعادلاتِ المعطى لإيجادِ نقاطِ التوازنِ التي يتساوى عندَها العرضُ والطلبُ. أنظر ملحق الإجابات.

14 أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$
$$x^2 + xy = 6$$

أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

15 **تبريرٌ:** قالَتْ زينبُ إنَّهُ لا يوجدُ حَلٌّ لنظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

هلْ قولُ زينبَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

نعم، قولها صحيح؛ لأنه لا يُمكِن إيجاد عددين مجموع مربعيهما يساوي 4، ويساوي 9 في آنٍ معًا.

16 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَكتبُ نظامًا مُكوَّنًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ ليسَ لهُ حَلٌّ.

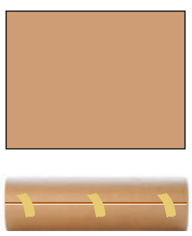
توجد إجابات مُتعدِّدة، منها: $x^2 + y^2 = 9\ ,\ x^2 + y = 10$

17 **تحدٍّ:** قطعةُ أرضٍ على شكلِ مثلثٍ مُتطابِقِ الضلعيْنِ، طولُ ضلعِهِ المُتطابِقِ 50 m، ومساحتُهُ $1200\ m^2$. أَجِدُ طولَ قاعدتِهِ، وارتفاعَهُ. أنظر ملحق الإجابات.

18 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَكتبُ نظامًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ؛ على أنْ تكونَ النقطةُ (5, 3) أحدَ حلولِهِ.

توجد إجابات مُتعدِّدة، منها: $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 4,\ x^2 - 10x + y = -22$

19 **تحدٍّ:** قطعةٌ منْ ورقٍ مُقوًّى مستطيلةُ الشكلِ، مساحتُها $216\ cm^2$، ثُنِيَ طولاها، ولُصِقا معًا، فتشكَّلَ أنبوبٌ أسطوانيٌّ حجمُهُ $224\ cm^3$. أَجِدُ بُعْدَيْ قطعةِ الورقِ.

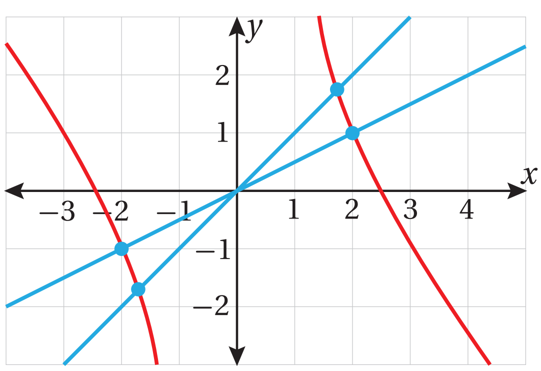


أنظر ملحق الإجابات.

22

إرشاد:

بعد حل المسألة 14، أطلب إلى الطلبة تفسير عدد الحلول، ومحاولة رسم شكل تقريبي لوضع منحنيي المعادلتين، ثم أُوجِّههم إلى استعمال برمجية جيوجبرا (في مختبر الحاسوب، أو في البيت، أو باستعمال هواتفهم الذكية) لتمثيل المعادلتين (أنظر التمثيل المرفق).



الدرس 3

الدرس 3

تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّة
Simplifying Exponential Expressions

فكرةُ الدرسِ معرفةُ الأسسِ النسبيةِ وتبسيطُها.

المصطلحاتُ الأُسُّ النسبيُّ.

مسألةُ اليومِ حديقةٌ مربعةُ الشكلِ، طولُ نصفِ ضلعِها مُعطًى بالحدِّ الجبريِّ $2x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{3}}z^{4}$، ما مساحتُها بالوحداتِ المربَّعةِ؟

مراجعةُ المفاهيمِ — التحويلُ مِنَ الصيغةِ الأسّيّةِ إلى الصيغةِ الجذريةِ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ a، إذا كانَ n وَ m عددينِ صحيحينِ موجبينِ $(n > 1)$، فإنَّ: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$، إلّا إذا كانَتْ $a < 0$، وَ n عددًا زوجيًّا، فإنَّ الجذرَ يكونُ غيرَ معرَّفٍ.

مثال 1

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $27^{\frac{1}{3}}$

$27^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^1$ بكتابةِ المقدارَ في صورةِ الجذرِ الثالثِ

$= \sqrt[3]{3\times3\times3}$ بتحليلِ العددِ 27 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= 3$

2) $4^{\frac{3}{2}}$

$4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3$ بكتابةِ المقدارِ في صورةِ الجذرِ التربيعي مرفوعًا للأُسِّ 3

$= \left(\sqrt{2\times2}\right)^3$ بتحليلِ العددِ 4 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= (2)^3$

$= (2\times2\times2)$ تعريفُ الأسسِ

$= 8$

أَتذكَّرُ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ a، إذا كانَ n عددًا صحيحًا موجبًا، فإنَّ: $a^n = \underbrace{a\times a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n \text{ مرة}}$، ويُسمّى a الأساسَ، وَ n الأُسَّ.

23

فكرة الدرس

- تعرُّف الأسس النسبية وخصائصها.
- كتابة مقادير أسية في أبسط صورة.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- الربط بين الأسس النسبية والجذور، والتحويل بينها.
- استعمال ضرب الأسس النسبية وقسمتها في إيجاد قيم مقادير تحتوي أسسًا نسبية وتبسيطها.
- إجراء العمليات الحسابية على الأعداد النسبية.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أكتب على اللوح تعريف القوة، مُذكِّرًا الطلبة بعناصرها.
- أكتب قوانين الأسس الصحيحة، وأُوضِّحها بأمثلة.
- أُبيِّن كيفية تبسيط الحدود الجبرية باستعمال قوانين الأسس، مُعزِّزًا ذلك بأمثلة.
- أكتب على اللوح عِدَّة جذور، ثم أطلب إلى الطلبة كتابتها في صورة أسس، مستعملين قوانين الأسس.
- أطلب إلى الطلبة تخمين موضوع الدرس.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
  - » أيُّكم شاهد حديقة مربعة؟
  - » أين شاهد ذلك؟
  - » ما قانون مساحة المربع؟ $A = s^2$
  - » ما مساحة الحديقة؟ $A = (4x^{\frac{2}{5}}\, y^{\frac{1}{3}}\, z^4)^2$
  - » هل يمكن كتابة هذا الحد الجبري بصورة أخرى؟ نعم.
  - » أذكرها. يمكن تبسيط هذا الحد، وكتابته في صورة: $A = 16x^{\frac{4}{5}}\, y^{\frac{2}{3}}\, z^8$

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

3 التدريس

مثال 1

- أكتب تعريف الأس النسبي، ثم أُوضِّحه للطلبة مُعزِّزًا بأمثلة.
- أسأل الطلبة:
  - » ما معنى تبسيط الأسس؟ كتابتها في أبسط صورة.
  - » كيف أُبسِّط حدًّا جبريًّا مُعطًى؟ بتطبيق قوانين الأسس.
- أستمع لإجابة أحد الطلبة، ثم أسأل زملاءه:
  - » مَنْ يوافقه في الرأي؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟

  وذلك لتعزيز مهارات التواصل لدى الطلبة (التعبير عن الرأي، واحترام الرأي الآخر).
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1، مُركِّزًا على تبرير كل خطوة.

إرشاد:

في المثال 1، أُذكِّر الطلبة أنَّ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$، وأنَّ n يُسمّى دليل الجذر.

---

3 $(81)^{-\frac{5}{4}}$

$(81)^{-\frac{5}{4}} = (\sqrt[4]{81})^{-5}$ الصورةُ الجذريةُ

$= (\sqrt[4]{3 \times 3 \times 3 \times 3})^{-5}$ بتحليلِ العددِ 81 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= (3)^{-5}$

$= \frac{1}{(3)^5}$ تعريفُ الأُسِّ السالبِ

$= \frac{1}{(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)}$ تعريفُ الأسسِ

$= \frac{1}{243}$

4 $(-8)^{\frac{7}{3}}$

$(-8)^{\frac{7}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^7$ الصورةُ الجذريةُ

$= (\sqrt[3]{-2 \times -2 \times -2})^7$ بتحليلِ العددِ -8 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= (-2)^7$

$= -128$

أتذكَّرُ

لأيِّ عـددٍ حقيقيٍّ $a \neq 0$، فإنَّ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. وإذا كانَ a مرفوعًا لأسٍّ سـالبٍ ويقعُ في المقامِ، فإنَّ: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $32^{\frac{1}{5}}$ 2 b) $9^{\frac{5}{2}}$ 243 c) $(16)^{-\frac{5}{4}}$ $\frac{1}{32}$

مراجعةُ المفاهيمِ خصائصُ ضربِ القوى وقسمتِها

لأيِّ عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ a وَ b وعددَيْنِ صحيحَيْنِ m وَ n، فإنَّ:

ضربُ القوى	**1** $a^n \times a^m = a^{n+m}$
قوَّةُ القوى	**2** $(a^n)^m = a^{n \times m}$
قوَّةُ ناتجِ الضربِ	**3** $(ab)^n = a^n \times b^n$
قسمةُ القوى	**4** $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0$
قوَّةُ ناتجِ القسمةِ	**5** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, a, b \neq 0$

24

تنويع التعليم:

في المثال 1، قد يواجه بعض الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في استعمال قوانين الأسس؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأُزوِّدهم بأمثلة سهلة، مُنوِّهًا إيّاهم بضرورة تبرير كل خطوة في الحل؛ ما يساعدهم على حفظ قوانين الأسس.

أخطاء شائعة:

- في المثال 1، قد يُخطِئ بعض الطلبة في دليل الجذر، فيكتبون $a^{\frac{m}{n}}$ في صورة $\sqrt[m]{a^n}$؛ لذا أُنبِّههم إلى خطئهم، مُبيِّنًا لهم الفرق بين a^3، و $a^{\frac{1}{3}}$ مثلًا.
- قد يُخطِئ بعض الطلبة، فيجدون الجذر التربيعي (أو أيَّ جذر دليله زوجي) لعدد سالب؛ لذا أُبيِّن لهم دائمًا أنَّه عدد غير حقيقي، ثم أطلب إليهم ذكر مثال على عدد يُضرَب في نفسه مرتان أو أربع مرات، ويكون الناتج -16 مثلًا؛ لإقناعهم بأنَّ ذلك غير ممكن.

تنطبقُ خصائصُ ضربِ القوى وقسمتِها التي درسْتُها سابقًا للأسسِ الصحيحةِ على **الأسسِ النسبيةِ** (rational exponents) أيضًا.

مثال 2

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}}$

$y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}} = y^{-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}$ ضربُ القوى

$= y^{-1}$ بجمعِ الأسسِ

$= \frac{1}{y}$ تعريفُ الأُسِّ السالبِ

2) $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{3} \times \frac{1}{2}}$ بالتبسيطِ

$= x^{\frac{2}{3}}$

$= \sqrt[3]{x^2}$ الصورةُ الجذريةُ

3) $(a \times b^2)^{\frac{3}{2}},\ a > 0$

$(a \times b^2)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \times b^{2 \times \frac{3}{2}}$ قوَّةُ ناتجِ الضربِ

$= \sqrt{a^3} \times b^3$ الصورةُ الجذريةُ

4) $\dfrac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}}$

$\dfrac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}} = z^{\frac{7}{8}-\frac{1}{8}}$ قسمةُ القوى

$= z^{\frac{6}{8}}$ بالتبسيطِ

$= z^{\frac{3}{4}}$ بالتبسيطِ

$= \sqrt[4]{z^3}$ الصورةُ الجذريةُ

أَتعلَّمْ

تنقسمُ الجذورُ بحسبِ دليلِ الجـذرِ إلى نوعيْـنِ، هما: الجذورُ الفرديةُ، والجذورُ الزوجيةُ. مثلاً:

جذورٌ فرديةٌ:

$\sqrt[3]{7}\ ,\ \sqrt[5]{x^2+1}$

جذورٌ زوجيةٌ:

$\sqrt{18}\ ,\ \sqrt[6]{9+3y}$

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حـل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشـتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أُناقِـش الطلبة في بند (مراجعـة المفاهيم: خصائص ضرب القوى وقسمتها)، مُركِّزًا على تسمية كل قانون من قوانين الأسس؛ ليسهل عليهم حفظها.
- أبدأ حل المثـال 2 بكتابة التفاصيل جميعها، واسـم القانون في الهامش عند استعماله.
- أُؤكِّد للطلبة أنَّه يُمكِن استعمال أكثر من قانون في حل المسألة نفسها.

إرشاد: في المثال 2، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في إجراء العمليات على الأعداد النسبية؛ لذا أُذكِّرهم بكيفية جمع الأعداد النسبية، وطرحها، وضربها، وقسمتها.

تنويع التعليم:

- أطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط حل السؤال الآتي:

أُثبِت صحة ما يأتي:

$$\frac{x^{-3}}{x^{-\frac{5}{2}}} + x^{\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^2\right)$$

الحل:

$$\frac{x^{-3}}{x^{-\frac{5}{2}}} + x^{\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$$

$$= x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^2\right)$$

5) $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{4}}$

$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{x^{4\times\frac{3}{4}}}{y^{2\times\frac{3}{4}}}$ قوَّةُ ناتجِ القسمةِ

$= \frac{x^3}{y^{\frac{3}{2}}}$ قوَّةُ القوى

$= \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^3$ الصورةُ الجذريةُ

6) $\frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}}$

$\frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{2}{3}}}$ تعريفُ الأُسِّ النسبيِّ

$= x^{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}$ قسمةُ القوى

$= x^{\frac{2}{15}}$ بالتبسيطِ

$= \sqrt[15]{x^2}$ الصورةُ الجذريةُ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{7}}$ $\sqrt[21]{a^5}$

b) $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{7}{5}}$ $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$

c) $(y \times z)^{\frac{5}{4}}$ $y^{\frac{5}{4}} \times z^{\frac{5}{4}}$

d) $\frac{x^{\frac{9}{2}}}{x^{\frac{8}{5}}}$ $\sqrt[10]{x^{29}}$

e) $\left(\frac{x}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$ $\frac{y^3}{\sqrt{x^3}}$

f) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[7]{x^3}}$ $\frac{1}{\sqrt[35]{x}}$

مفهومٌ أساسيٌّ — **تبسيطُ العباراتِ الأسّيّةِ**

تكونُ العبارةُ الأُسِّيَّةُ في أبسطِ صورةٍ إذا:

1. ظهرَ الأساسُ مَرَّةً واحدةً، وكانَتِ الأسسُ جميعُها موجبةً.
2. لمْ تتضمَّنِ العبارةُ قوَّةَ القوى.
3. كانَتِ الكسورُ والجذورُ جميعُها في أبسطِ صورةٍ.

أخطاء مفاهيمية:

في المثال 2، قد يُخطِئ بعض الطلبة في تبسيط الأسس السالبة، فيُبسِّطون $\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x^{-1}}$ إلى $x^{-\frac{3}{2}}$؛ لذا، أُؤكِّد لهم ضرورة تغيير إشارة الأس عند نقل التعبير الأسي من المقام إلى البسط أو العكس، ثم تطبيق قوانين الأسس المناسبة لحالة التبسيط.

إرشادات:

- في المثال 2، أُذكِّر الطلبة بخاصية الأس الصفري، ثم أُثبِته على اللوح.
- أُنوِّه لهم بأنَّ: $\frac{x^n}{x^n} = 1$

مثال 3

- أشرح ما تعنيه كتابة العبارة الأسية في أبسط صورة، مُوضِّحًا كل شرط بمثال.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، مُستعمِلًا قوانين الأسس النسبية، ثم أطلب إليهم تبرير كل خطوة (لماذا؟).

أخطاء مفاهيمية:

في المثال 3، قد يُخطِئ بعض الطلبة في تبسيط العبارات الأسية ذات الأقواس، مثل: $\frac{(16p^4)^{\frac{3}{2}}}{(4p^2)^{\frac{1}{2}}}$، فلا يُطبِّقون قواعد الأسس تطبيقًا صحيحًا، ويطرحون القوى بالرغم من عدم تساوي الحد الجبري في كلٍّ من البسط والمقام، أو يختصرون البسط والمقام من دون مراعاة تساوي القوى؛ لذا أُذكِّرهم بقوانين الأسس، وشروط تطبيق كل منها.

مثال 3

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

1 $\dfrac{(6x^{\frac{4}{3}})(y^{\frac{-7}{5}})}{(2x^{\frac{-8}{3}})(y^{\frac{-2}{5}})}$

$\dfrac{6x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{7}{5}}}{2x^{\frac{-8}{3}}y^{\frac{-2}{5}}} = \left(\dfrac{6}{2}\right) \times \left(x^{\frac{4}{3}-\frac{-8}{3}}\right) \times \left(y^{\frac{-7}{5}-\frac{-2}{5}}\right)$ قسمةُ القوى

$= 3x^{4}y^{-1}$ بالتبسيطِ

$= \dfrac{3x^{4}}{y}$ تعريفُ الأُسِّ السالبُ

2 $\dfrac{(3xy^{\frac{3}{2}})(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})}$

$\dfrac{(3xy^{\frac{3}{2}})(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})} = \dfrac{3 \times 6}{9} \times \dfrac{x}{x^{\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}}} \times \dfrac{y^{\frac{3}{2}+\frac{2}{5}}}{y^{\frac{4}{10}}}$ ضربُ القوى

$= 2 \times \dfrac{x}{x^{1}} \times \dfrac{y^{\frac{19}{10}}}{y^{\frac{4}{10}}}$ بالتبسيطِ

$= 2x^{1-1}\,y^{\frac{19}{10}-\frac{4}{10}}$ بقسمةِ القوى

$= 2x^{0}\,y^{\frac{3}{2}}$ تعريفُ الأُسِّ الصفريِّ

$= 2\sqrt{y^{3}}$ الصورةُ الجذريةُ

أَفهمُ

إذا كانَتْ $m = n$ فإنَّ:

$1 = \dfrac{a^{n}}{a^{m}} = a^{n-n} = a^{0}$

إذنْ، $a^{0} = 1$.

3 $\sqrt[3]{64x^{12}y^{3}}$

$\sqrt[3]{64x^{12}y^{3}} = (64x^{12}y^{3})^{\frac{1}{3}}$ صورةُ الأُسِّ النسبيِّ

$= (64)^{\frac{1}{3}}\,(x)^{\frac{12}{3}}\,(y)^{\frac{3}{3}}$ قوَّةُ ناتجِ الضربِ

$= 4x^{4}y$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

a) $\dfrac{9x^{-\frac{3}{4}}y}{3x^{\frac{7}{2}}y^{-\frac{5}{3}}}$ $\dfrac{3\sqrt[3]{y^{8}}}{\sqrt[4]{x^{17}}}$

b) $\dfrac{(125y^{-\frac{9}{2}})(10xy^{\frac{10}{3}})}{(5x^{\frac{5}{2}}y)(y^{-\frac{3}{7}})}$ $\dfrac{250}{\sqrt{x^{3}} \times \sqrt[42]{y^{73}}}$

c) $\sqrt[4]{16x^{18}y^{22}}$ $2\sqrt{x^{9} \times y^{11}}$

4 التدريب

أتدرَّب وأحلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1–15) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (19–24).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 16, 17 كتاب التمارين: (1 – 12)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (16 – 18) كتاب التمارين: (7 – 13)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (14 – 19) كتاب التمارين: (17 – 24)

إرشاد: قد يختلف تصنيف الطلبة من درس إلى آخر تبعًا لأدائهم. فمثلًا، قد يكون أداء أحد الطلبة دون المتوسط في درس، وفوق المتوسط في درس آخر.

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:

» أجد قيمة a التي تحقق المعادلة الآتية:

$$\frac{5\sqrt{5^a}+\sqrt{125}}{\sqrt{5}}=30$$

$$a=3$$

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة استكمال الخطوة الثالثة والانتهاء منها، وبدء العمل بخطوة عرض نتائج المشروع، وإضافة كل العناصر المطلوبة فيه.
- في حال واجه الطلبة صعوبة في إعداد العرض، أطلب إليهم استعمال شبكة الإنترنت، أو الاستعانة بمُعلِّم/ بمُعلِّمة الحاسوب.

6 الختام

نشاط (مسابقة بين المجموعات):

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات.
- أكتب على اللوح تعبيرًا أسيًّا (يُمكِن الاستعانة بأحد السؤالين الآتيين، أو ما أراه مناسبًا)، ثم أطلب إلى الطلبة كتابته في أبسط صورة.

1 $(8a^6)^{\frac{1}{3}}\times\left(\frac{27}{a^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

2 $\dfrac{9(3a^4)^{-2}}{\sqrt{(36a^4)}}$

- المجموعة الفائزة هي التي تكتب المقدار الأسي في أبسط صورة في أسرع وقت.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $512^{\frac{1}{9}}$ 2

2 $125^{\frac{2}{3}}$ 25

3 $36^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{6}$

4 $(-243)^{\frac{6}{5}}$ 729

5 $(25)^{\frac{3}{2}}$ 125

6 $(-64)^{\frac{7}{3}}$ -128

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

7 $z^{-\frac{4}{2}}\times z$ $\frac{1}{z}$

8 $(x^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{7}}$ $\sqrt[7]{x^3}$

9 $(a^3\times b)^{\frac{2}{3}}$ $a^2\sqrt[3]{b^2}$

10 $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{7}{2}}}$ $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^{17}}}$

11 $\dfrac{\sqrt{y^3}}{\sqrt[6]{y^9}}$ 1

12 $\dfrac{k^{\frac{1}{2}}\times k^{\frac{3}{2}}}{k^2}$ 1

أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

13 $\left(\dfrac{40x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{7}{3}}}{5x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{16}{3}}}\right)^{-\frac{2}{5}}$ $\dfrac{1}{\sqrt[5]{64}\,\sqrt[10]{x^9}\,\sqrt[5]{y^6}}$

14 $\dfrac{27x^{\frac{7}{3}}y^{-\frac{4}{2}}xz^2}{(3x^2y^{\frac{5}{2}})(3x^{\frac{5}{3}}y^{-5})}$ $\dfrac{3\sqrt{y}\,z^2}{\sqrt[3]{x}}$

15 $\dfrac{(a^2b^3)^{-2}\times ab^4}{a^{-1}b^2}$ $\dfrac{1}{a^2b^4}$

16 $\dfrac{(8p^{-6}q^3)^{\frac{2}{3}}}{(27p^3q)^{-\frac{1}{3}}}$ $\dfrac{12q^{\frac{7}{3}}}{p^3}$

17 $\dfrac{(x^2y)^{\frac{1}{3}}(xy^2)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$ $x^{\frac{2}{3}}y$

18 $\dfrac{(4x^{-1}y^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}}{(xy)^{\frac{3}{2}}}$ $\dfrac{8}{x^3y}$

مهارات التفكير العليا

19 **تحدٍّ:** أَجِدُ قيمةَ المقدارِ الأُسِّيِّ الآتي:

$(-5)^{43}+(-1)^{43}+(5)^{43}$ -1

20 **تبريرٌ:** تتضاعفُ عيِّنةٌ في المختبرِ 3 مَرّاتٍ كلَّ أسبوعٍ. إذا علمْتُ أنَّ فيها 7300 خليةٍ بكتيريةٍ، فكمْ خليةً سيصبحُ فيها بعدَ مرورِ 5 أسابيعَ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

تحدٍّ: أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

21 $\dfrac{r^{\frac{3}{2}}+r^{\frac{5}{2}}}{r^2+r^3}$ أنظر ملحق الإجابات.

22 $\dfrac{y^{-\frac{1}{2}}-2y^{-\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}-2y^{-\frac{1}{2}}}$ أنظر ملحق الإجابات.

23 $\dfrac{1+x}{2x^{\frac{1}{2}}}+x^{\frac{1}{2}}$ أنظر ملحق الإجابات.

24 **تبريرٌ:** أُقارِنُ بينَ العددَيْنِ: 2^{175} وَ 5^{75} اعتمادًا على خصائصِ الأسسِ، منْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ. أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.

إرشاد: أُذكِّر الطلبة أنَّه لا يجوز الاختصار بين البسط والمقام في حالة وجود جمع أو طرح في أحدهما في الأسئلة (21–23).

إجابة:

24) $2^{175}=2^{7\times25}=(2^7)^{25}=(128)^{25}$

$5^{75}=5^{3\times25}=(5^3)^{25}=(125)^{25}$

وبما أنّ $128>125$، فإن $(128)^{25}>(125)^{25}$

أي أنّ: $2^{175}>5^{75}$

الدرس 4

الدرس 4

حَلُّ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ
Solving Exponential Equation

فكرةُ الدرسِ حَلُّ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ، حَلُّ أنظمةِ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ.

المصطلحاتُ المعادلةُ الأُسِّيَّةُ.

مسألةُ اليومِ تستغرقُ الزنبقةُ المائيةُ 26 يومًا لتنموَ بصورةٍ كاملةٍ. إذا علمْتُ أنَّ الزهرةَ تنمو يوميًّا بمقدارِ الضِّعْفِ عنِ اليومِ السابقِ، فكمْ يومًا يَلزمُها لتصلَ إلى نصفِ مرحلةِ النموِّ؟

المعادلةُ الأُسِّيَّةُ (exponential equation) هيَ معادلةٌ تتضمَّنُ قوًى أُسُسُها مُتغيِّراتٌ، ويتطلَّبُ حَلُّها كتابةَ طرفَيِ المعادلةِ بصورةِ قوَّةٍ للأساسِ نفسِهِ، ثمَّ المقارنةَ بينَ أُسَّيِ الطرفَيْنِ، وَفقَ القاعدةِ التي نصُّها: "إذا تساوَتْ قوَّتانِ لهُما الأساسُ نفسُهُ، فإنَّ أُسَّيْهِما متساويانِ."

مثال 1

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

1 $5^{3x+2} = 25^{x-1}$

$5^{3x+2} = (5^2)^{x-1}$ — $5^2 = 25$

$5^{3x+2} = 5^{2(x-1)}$ — الأساسانِ متساويانِ

$3x + 2 = 2x - 2$ — بمساواةِ الأسسِ

$x = -4$ — بحَلِّ المعادلةِ

2 $8^x = 2 \times (\frac{1}{2})^x$

$(2^3)^x = 2 \times (2^{-1})^x$

$2^{3x} = 2 \times 2^{-x}$ — قوَّةُ القوى

$2^{3x} = 2^{-x+1}$ — ضربُ القوى

$3x = -x + 1$ — بمساواةِ الأسسِ

$x = \frac{1}{4}$ — بحَلِّ المعادلةِ

أَبحثُ: قوَّةُ العددِ 2 أوْ 2^x مهمةٌ جدًّا في علمِ الحاسوبِ، لماذا؟

29

فكرة الدرس

- حل معادلة أسية.
- حل نظام معادلات أسية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- حل المعادلة الخطية.
- حل المعادلة التربيعية.
- حل نظام مكون من معادلتين.
- تبسيط حدود ومقادير جبرية باستعمال قوانين الأسس.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أكتب على اللوح معادلة خطية، ثم أطلب إلى الطلبة حلها.
- أكتب المعادلة الخطية في صورة قوَّة أساسها العدد 5 مثلًا، ثم أكتب الطرف الآخر؛ على أنْ يساوي العدد 5
- أطلب الى الطلبة اقتراح اسم المعادلة الناتجة.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.
- أطلب إلى الطلبة تخمين موضوع الدرس.

ملاحظاتي

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » هل يُمكِن التعبير عن نمو الزهر بمعادلة؟ نعم، $y = 2^x$
  - » هل تزداد قيمة y مع ازدياد قيمة x أم تنقص؟ تزداد.
  - » ما نوع المعادلة في المسألة؟ معادلة أسية.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المســتخدمة في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

3 التدريس

مثال 1

- أبدأ بشرح مفهوم المعادلة الأسية، ثم أسأل الطلبة:
  - » ماذا يُقصَد بحل المعادلة الأسية؟ إيجاد قيمة المتغير الذي يجعل المعادلة عبارة صحيحة.
  - » مَنِ يقترح/ تقترح طريقة لحل المعادلة الأسية؟
- أستمع لإجابة أحد الطلبة، ثم أسأل زملاءه:
  - » مَنْ يوافقه في الرأي؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
- أستمع لإجابات الطلبة، ثم أُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أُناقِــش الطلبة في حل المثال 1، مُؤكِّدًا لهم ضرورة التحقُّق من صحة الحل بالتعويض في طرفي المعادلة.

إرشاد: في المثال 1، أُوجِّه الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة للتحقُّق من صحة الحل.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوي المســتوى دون المتوســط صعوبة في توحيد الأساس، فأُذكِّرهم بقوى الأعداد، مثل: 2, 3, 4, 5, 10، مُحفِّزًا إيّاهم على كتابتها وحفظها؛ لكي تساعدهم في أثناء الحل.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

a) $4^{x-5} = 32^{2x+1}$ $-\frac{15}{8}$

b) $9^{x} = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ $\frac{1}{3}$

c) $625^{2x+1} = \frac{5}{\sqrt{5}}$ $-\frac{7}{16}$

توجدُ تطبيقاتٌ حياتيةٌ كثيرةٌ لِحَلِّ المعادلاتِ الأسيةِ.

مثال 2: من الحياة

بكتيريا: يتضاعفُ عددُ الخلايا البكتيريةِ في عينةٍ مخبريةٍ 4 مراتٍ كلَّ ساعةٍ، إذا استُعمِلَتِ المعادلةُ $y = 3(4^{x-1})$ لحسابِ عددِ الخلايا البكتيرية y في العينةِ بعدَ مرورِ x ساعةً مِنْ زمنِ تحضيرِ العينةِ، فما الزمنُ اللازمُ ليصبحَ في العينةِ 192 خليةً؟

المعادلةُ المعطاةُ	$y = 3(4^{x-1})$
بتعويضِ $y = 192$ في المعادلةِ	$192 = 3(4^{x-1})$
بقسمةِ طرفَي المعادلةِ على 3	$64 = (4^{x-1})$
$64 = 4^{3}$	$4^{3} = (4^{x-1})$
بمساواةِ الأُسُسِ	$3 = x-1$
بحلِّ المعادلةِ الخطّيةِ الناتجةِ	$x = 4$

إذنْ، يصبحُ في العيّنةِ 192 خليةً بعدَ 4 ساعاتٍ.

قدْ يحتوي الغِرامُ الواحدُ منَ التربةِ على نحوِ 10^{10} خلايا بكتيريةٍ مختلفةِ الأنواعِ.

أتحقق من فهمي

تعليمٌ: يزدادُ عددُ الاشتراكاتِ في موقعٍ تعليميٍّ على الإنترنتْ عامًا بعدَ عامٍ، وتُستعملُ المعادلةُ $y = 2(3^{2x-6})$ لحسابِ عددِ الاشتراكاتِ y بالألوفِ بعدَ مرورِ x عامًا مِنْ إطلاقِ الموقعِ. ما الزمنُ اللازمُ ليصبحَ عددُ الاشتراكاتِ في الموقعِ 162 ألفَ اشتراكٍ؟ 5 سنوات.

ازدادَ استعمالُ المواقعِ التعليميةِ بما نسبتُهُ 900% منذُ عامِ 2000م.

يُمكِنُني حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ أُسِّيَّتيْنِ بكتابةِ طرفَيِ المعادلةِ الأولى في صورةِ قوَّةٍ للأساسِ نفسِهِ، ثمَّ مساواةِ أُسَّيِ الطرفيْنِ، ثمَّ تكرارِ ذلكَ في المعادلةِ الثانيةِ، فيتكوَّنُ نظامٌ منْ معادلتيْنِ.

30

أخطاء مفاهيمية:

في المثال 1، قد يُخطِئ بعض الطلبة في تطبيق قوانين الأسس عند محاولة إيجاد أساس مشترك في طرفي المعادلة.

فمثلًا، قد يكتبون $3^{4y} = 9^{y+1}$ في صورة $3^{4y} = 3^{2y+1}$، أو يكتبون $2^{x} = 16^{2x}$ في صورة $2^{x} = 2^{4x}$؛ لذا أطلب إليهم استعمال الأقواس في الخطوات الأولى من الحل، وتجزئة الحل إلى خطوات، أو استعمال أيِّ طريقة يجدونها مناسبة.

مثال 2: من الحياة

- أُناقِش مع الطلبة المثال 2 الذي يُبيِّن استعمال المعادلات الأسية في مواقف حياتية، يمكن منها حساب عدد الخلايا بعد عدد معلوم من الساعات، بالتعويض المباشر، وحساب الناتج، وكذلك تحديد الزمن اللازم حتى يصل عدد الخلايا حدًّا معلومًا.
- أُناقِش الطلبة في خطوات الحل على اللوح، وأطلب إليهم تبرير كل خطوة.

مثال 3

- أُوضِّح للطلبة مفهوم نظام المعادلات الأسية، وكيفية حلِّه، بطرح الأسئلة الآتية:
  - » ماذا يعني لك اسم (نظام من معادلتين أسيتين)؟
  - » كم متغيرًا فيه؟
  - » ما معنى حل نظام المعادلات الأسية؟
  - » اقترح طريقة لحل النظام.
  - » مَنْ لديه طريقة أخرى؟
- أستمع لإجابات الطلبة، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة، ثم أُوضِّح مفهوم نظام المعادلتين الأسيتين، وكيفية حله.
- أُناقِش الطلبة في خطوات الحل على اللوح، وأطلب إليهم تبرير كل خطوة.
- أُؤكِّد للطلبة ضرورة التحقُّق من صحة الحل؛ بالتعويض في المعادلتين.

إرشاد:

- في المثال 3، قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في حل نظام المعادلات باستعمال طريقة الحذف، أو التعويض؛ لذا أُذكِّرهم بهاتين الطريقتين بذكر مثال بسيط.

مثال 4

- أُوضِّح خطوات حل المعادلة الأسية بيانيًّا بتكوين معادلتين، يُمثِّل كلٌّ منهما أحد طرفي المعادلة الأسية، وتمثيلهما باستعمال برمجية جيوجبرا في المستوى نفسه معًا، وملاحظة نقطة (أو نقاط) تقاطعهما، فيكون حل المعادلة الأسية هو الإحداثي x لنقطة التقاطع.
- أُشارِك الطلبة في تنفيذ خطوات الحل في جهاز الحاسوب، أو الهواتف الذكية.

مثال 3

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاورِ:

$$4^{2x} \times 2^{y} = 64$$
$$9^{x} \times 3^{y} = 81$$

المعادلةُ الأُسِّيَّةُ الأولى	$4^{2x} \times 2^{y} = 64$
بتحليلِ العددَيْنِ 4 وَ64 إلى عواملِهِما الأوليةِ	$(2^{2})^{2x} \times 2^{y} = 2^{6}$
قوَّةُ القوى	$2^{4x} \times 2^{y} = 2^{6}$
ضربُ القوى	$2^{4x+y} = 2^{6}$
بمساواةِ الأسسِ	$4x + y = 6$

بتطبيقِ الخطواتِ نفسِها على المعادلةِ الثانيةِ تنتجُ المعادلةُ الخطِّيَّةُ $2x + y = 4$

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الخطِّيَّ الناتجَ بالحذفِ:

$$\begin{array}{rr} & 4x + y = 6 \\ (-) & 2x + y = 4 \\ \hline & 2x = 2 \end{array}$$

بطرحِ المعادلتَيْنِ	$2x = 2$
بالقسمةِ على 2	$x = 1$
بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ الثانيةِ	$4(1) + y = 6$
	$4 + y = 6$
بحَلِّ المعادلةِ	$y = 2$

إذنْ، حَلُّ نظامِ المعادلاتِ هوَ: $x = 1 , y = 2$

أتذكَّر

يُمكِنُني حَلُّ نظامِ المعادلاتِ الخطِّيِّ بالحذفِ، أوِ التعويضِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاورِ:

$$\frac{4^{x}}{256^{y}} = 64$$
$$3^{2x} \times 9^{y} = 243$$

$x = 2.6, y = -0.1$

قَدْ لا يكونُ مِنَ الممكنِ كتابةُ أحدِ طرفَيِ المعادلةِ الأُسِّيّةِ على صورةِ قوةٍ للأساسِ نفسه، عندئذٍ يمكنُ حلُّ المعادلةِ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةٍ حاسوبيةٍ أَوْ آلةٍ حاسبةٍ بيانيةٍ.

مثال 4 أحلُّ المعادلةَ الأُسّيّةَ الآتيةَ $3^{x-1} = 5$ بيانيًّا.

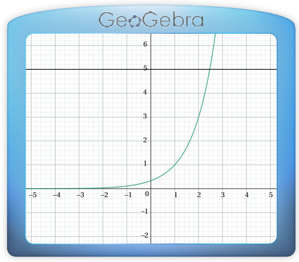
ألاحظُ أنَّهُ ليسَ مِنَ الممكنِ كتابةُ طرفَيِ المعادلةِ بصورةِ قوَّةٍ للأساسِ نفسِهِ، لذلكَ أحلُّ المعادلةَ بيانيًّا.

الْخُطْوَةُ 1 أكتبُ نظامَ معادلاتٍ باستعمالِ طرفَيِ المعادلةِ.

المعادلةُ 1 $y=5$

المعادلةُ 2 $y=3^{x-1}$

الْخُطْوَةُ 2 أمثّلُ المعادلتَينِ بيانيًّا في المستوى نفسِهِ باستعمالِ برمجيةِ جيوجِبرا.



الْخُطْوَةُ 3 أجـدُ إحداثيَّـيْ نقطـةِ تقاطعِ المنحنيَينِ.

أختارُ أيقونةَ Intersect مِنْ شـريطِ الأدواتِ، ثُمَّ أنقرُ على كلا المنحنيَينِ فيظهرُ إحداثيّا نقطةِ التقاطعِ $(2.46, 5)$

إذنْ، حلُّ المعادلةِ هُوَ $x=2.46$

أتحقق من فهمي

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلتَينِ الأُسّيتَينِ الآتيتَينِ بيانيًّا:

a) $3^{x}=-6^{x+2}+1$ $x=-2.06$

b) $5=4^{x+1}$ $x=0.16$

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

1) $64=(32)^{3-x}$ $\frac{9}{5}$

2) $81^{5x+1}=27^{4x-3}$ $\frac{-13}{8}$

3) $128^{x-5}=\frac{2}{\sqrt{2}}$ $\frac{71}{14}$

4) $64^{7x+1}=\frac{2}{16^{4x-3}}$ $\frac{7}{58}$

5) $\left(\frac{11}{\sqrt{11}}\right)^{3x+1}=(11)^{x+7}$ 13

6) $\left(\sqrt{7}\right)^{4x+5}=\left(\frac{\sqrt{28}}{2}\right)^{7x-2}$ $\frac{7}{3}$

7) $9^{x^2}\times 27^{x^2}=243$ ± 1

8) $5^{2x}\times 25^{x}=125$ $\frac{3}{4}$

9) $2^{x^2}\times 2^{6x}=\frac{1}{32}$ $-1, -5$

4 التدريب

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

- أُوجِّـه الطلبة إلى بنـد (**أتدرَّب وأحل المسـائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسـائل (21-1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشـرًا بأمثلة الدرس، وهي تُسـتعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسـألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّـنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسـألة؛ لمناقشـة استراتيجيته/ اسـتراتيجيتها في حل المسألة على اللـوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تسـاؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند(**مهارات التفكير العليا**)، وأطلب إليهم حلّ المسائل (27 – 25).

الواجب المنزلي:

أسـتعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 22, 23 كتاب التمارين: (1 – 13), 18, 19
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (22 – 25) كتاب التمارين: (9 – 17), 20, 21
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (24 – 27) كتاب التمارين: (13 – 17), 20, 21

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةَ:

10 $5^y = 25^{x-3}$, $125^y = 25^{x-1}$ $(4, 2)$

11 $3^y = 3^{2x+y}$, $27^y = 27^{x+3}$ $(0, 3)$

12 $5^{2x} \times 25^y = 125$, $\frac{8^x}{2^y} = 16$ $\left(\frac{11}{8}, \frac{1}{8}\right)$

13 $9^{2-x} = 81^{6y}$, $\left(\frac{1}{216}\right)^{-2x-3} = 36^{3y}$ $\left(\frac{-16}{13}, \frac{7}{26}\right)$

14 $\frac{16^{-x}}{64^{-3x}} = 16^{-3y-3}$, $8^{x^2} = \left(\frac{1}{2^{y+1}}\right)^2$ $(0, -1), \left(\frac{7}{9}, \frac{-103}{54}\right)$

15 $\frac{1}{27} \times 9^{2-n} = 3^{m^2-2}$, $2^{m^2} \times 2^n = 64$ $(-3, -3), (3, -3)$

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الأُسّيّةِ الآتيةِ بيانيًّا:

16 $4^{x+3} = 6$ -1.71

17 $2^x = 1.8$ 0.848

18 $4 = 8^x$ 0.667

19 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} = 10$ -10.004

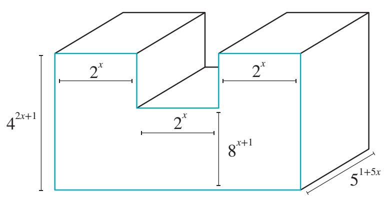
20 $2^{-x-3} = 3^{x+1}$ -1.774

21 $5^x = -4^{x+4}$ ليس لها حل

22 **تصويرٌ:** تُستعمَلُ المعادلةُ $y = 2^{x+2}$ لحسابِ مقاسِ ورقةٍ y بعدَ تكبيرِها بنسبةِ 100% عددَ x مِنَ المرّاتِ، مقارنةً بمقاسِها الأصليِّ، باستعمالِ آلةٍ ناسخةٍ. كَمْ مرّةً يجبُ تكبيرُ صورةٍ ليصبحَ مقاسُها 32 ضعفَ مقاسِها الأصليِّ؟ 3 مرّات

23 **بكتيريا:** يُمثِّلُ المقدارُ 3^{t-2} عددَ الخلايا البكتيريةِ في تجربةٍ مخبريةٍ بعدَ مرورِ t منَ الساعاتِ. ما الزمنُ اللازمُ ليصبحَ عددُ الخلايا البكتيريةِ 2187 خليةً؟ أنظر الهامش.

24 **هندسةٌ:** أَكتبُ في أبسطِ صورةٍ عبارةً أُسِّيَّةً تُمثِّلُ حجمَ الشكلِ المجاورِ.



27 – 24 أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

25 **تبريرٌ:** هلْ يُمكِنُ حَلُّ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ: $2 + 2^x = 1$ ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

26 **تبريرٌ:** أَحُلُّ المعادلةَ: $x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} = 4$، مُبرِّرًا خطواتِ الحَلِّ.

27 **تحدٍّ:** أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الأُسِّيَّةِ الآتيَ:

$$2^x + 3^y = 10$$
$$2^{x+1} + 3^{y+1} = 29$$

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤالين الآتيين بوصفهما إثراءً لهم:
  - » أحل المعادلة الأسية:

$$2^{2x} - 2^{x+4} + 64 = 0 \quad x = 3$$

  - » أحل نظام المعادلات الآتي:

$$\frac{16^{4x-1}}{64^{y-2}} = 4^{y+x}$$

$$\frac{\left(625^{-\frac{x}{2}}\right)^{4-y}}{64^{y-2}} = 5^{4y-18x} \quad x = \frac{4}{7}, y = 2$$

تعليمات المشروع:

- أُذكِّر الطلبة بقرب موعد عرض نتائج المشروع، ووجوب الانتهاء من تجهيزه، والتحقُّق من توافر العناصر المطلوبة جميعها؛ استعدادًا لعرضه.
- أُذكِّر الطلبة بأداة تقييم المشروع الواردة في بداية الوحدة.

6 الختام

مسابقة (التحديات الثلاثة):

- أُحضِر ثلاثة صناديق، ثم أكتب على الأول عبارة: (التحدي 1)، وأكتب على الثاني عبارة: (التحدي 2)، وأكتب على الثالث عبارة: (التحدي 3).
- أضع مجموعة من الأوراق في كل صندوق، كُتِب في كلٍّ منها سؤال مناسب (أستعين بالجدول الآتي).
  - » حل المعادلة: ....

التحدي 1	**a)** $x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$ **b)** $x^{-\frac{1}{2}} = 25x^{\frac{3}{2}}$ **c)** $x^{2x-1} = 3^{x+1}$ **d)** $2^{2y} \times 2^{2-y} = 2^{-y}$
التحدي 2	**a)** $25^{2x} = 5^{1-x}$ **b)** $81^{-\frac{y}{2}} = 27^{2y+1}$ **c)** $\left(\frac{1}{4096}\right)^{-\frac{y}{z}} = 16^{2z-1}$
التحدي 3	**a)** $2^{\frac{1}{2-x}} \times 3^{2x} = 108$ **b)** $1875 = 3^{2x-1} \times 5^{3+x}$ **c)** $2^{3x+1} \times 5^{5+2x} = 800$

- أُقسِّم مجموعة من طلبة الصف إلى فريقين (كل فريق يتألَّف من 5 طلبة).
- أطلب إلى أفراد كل مجموعة ترشيح متسابق من فريقهم لسحب ورقة من صندوق (التحدي 1)، ثم حل السؤال المكتوب في الورقة خلال دقيقتين.
- يحصل الفريق الذي إجابته صحيحة على نقطة.
- أُكرِّر الخطوة السابقة للصندوق الثاني، ثم الثالث مع متابعة تسجيل النقاط.
- الفريق الفائز هو الذي يجمع نقاطًا أكثرَ.

إجابة:

23) $3^{t-2} = 2187$

بتحليل 2187 إلى عواملها الأولية نجد أن $2187 = 3^7$

إذن، $3^{t-2} = 3^7$

$t - 2 = 7 \Rightarrow t = 9$

الوحدة 1

اختبار نهاية الوحدة

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثـم أُوزِّع على كلٍّ منها الأسئلة (18–1).
- أطلب إلى أفراد كل مجموعة مناقشة إجابات الأسئلة الخاصة بهم.
- أتجوَّل بيـن أفراد المجموعات مُرشِـدًا ومُسـاعِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أُناقِش أفراد المجموعات في حل بعض المسائل على اللوح.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

1 أيُّ الأزواجِ المُرتَّبةِ الآتيةِ تُمثِّلُ حَلًّا لنظامِ المعادلاتِ:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$3x + y = 6$$

a) $(1, 3)$ b) $(0, 2)$
c) $(2, 0)$ d) $(-2, -2)$

2 أيُّ الأزواجِ المُرتَّبةِ الآتيةِ يُمثِّلُ حَلًّا لنظامِ المعادلاتِ:

$$y = x^2 - 5x + 6$$
$$y = -x^2 + 2x + 3$$

a) $(0, 3)$ b) $(1, 2)$
c) $(2, 0)$ d) $(3, 0)$

3 أيُّ الأزواجِ المُرتَّبةِ الآتيةِ يُمثِّلُ حَلًّا لنظامِ المعادلاتِ:

$$3^{5x} \times 9^{y} = 27$$
$$5^{3x} \times 5^{y} = 25$$

a) $(-1, -1)$ b) $(1, 1)$
c) $(-1, 1)$ d) $(1, -1)$

4 يمثِّلُ $x = -1$ حلًّا للمعادلةِ الأُسِّيةِ:

a) $5^{2x+1} = 25$ b) $3^{1+x} = 81$
c) $7^{3-2x} = 49$ d) $4^{2-x} = 64$

5 المقدارُ الجبريُ الـذي يجبُ وضعُه في المربَّعِ الفارغِ للمعادلةِ $\frac{8x^2y^3}{\square} = \left(\frac{2y}{x}\right)^2$ هوَ:

a) $2x^4y$ b) $4x^4y^2$
c) $2xy$ d) x^2y^2

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي، ثمَّ أَتَحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحلِّ:

6 $y = 4x$
$y = 5 - x^2$
$(1, 4), (-5, -20)$

7 $y - x = 15$
$x^2 + y^2 = 64$
لا يوجد حل

8 $y = x^2 - 4x + 5$
$y = -x^2 + 5$
$(0, 5), (2. 1)$

9 $y = -x^2 - x + 12$
$y = x^2 + 7x + 12$
$(0, 12), (-4, 0)$

إذا كانَ c ثابتًا في نظامِ المعادلاتِ الآتي،

$$x - 2y = 1$$
$$x^2 - y^2 = c$$

فأَجِدُ:

10 حَلَّ هذا النظامِ، علمًا بأنَّ $c = 8$
$(3, 1), \left(-\frac{11}{3}, -\frac{7}{3}\right)$

11 جميعَ قيمِ c الممكنةِ التي لا تجعلُ للنظامِ أيَّ حَلٍّ.
$c < -\frac{1}{3}$

12 أجدُ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: $3 - 7x < 6x^2$ بحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$y = 3 - 7x$$
$$y = 6x^2$$

أنظر ملحق الإجابات.

تدريب على الاختبارات الدولية

أُعرِّف للطلبة المقصود بالاختبارات الدولية، ثم أُبيِّن لهم أهميتها مستعينًا بالمعلومة التالية، ثم أُوجِّههم إلى حل الأسئلة في بند (تدريب على الاختبارات الدولية) بصورة فردية، ثم أُناقِشهم في إجاباتها على اللوح.

"يتقدَّم طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة (PISA) في مجالات القراءة والرياضيات والعلوم. وفي ما يخصُّ الرياضيات، فإنَّ المعرفة الرياضية – وَفق هذا البرنامج- يُعبَّر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات وتوظيفها وتفسيرها في أوضاع مختلفة؛ إذ إنَّها تتضمَّن القدرة على التفكير الرياضي واستخدام المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر والتنبُّؤ بها، وتسعى لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتُعينهم على تقييم النجاحات أو الإخفاقات. يشارك الأردن في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ مطلع تسعينيات القرن العشرين الميلادي؛ لذا يتعيَّن عليك عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة تحفيز الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة، والاهتمام بالمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وتضمين الاختبارات المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة."

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيّةٌ موجبةٌ:

13) $\frac{2}{2^3 \times 2^{-4}}$ 4

14) $\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$ $\frac{16}{9}$

15) $\frac{(16p^4q^{-2})^{-\frac{3}{2}}}{(64p^2q^{-1})^{-\frac{1}{2}}}$ $\frac{\sqrt{q^5}}{8p^5}$

16) $\frac{(27a^{\frac{3}{2}}b^{-6})^{-\frac{1}{3}}}{(729a^4b^{-2})^{-\frac{1}{2}}}$ $9b\sqrt{a^3}$

تحدٍّ: أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ a وَ b في كلٍّ ممّا يأتي:

17) $3^a x^b = \frac{27x^{\frac{7}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ $a=3, b=\frac{11}{6}$

18) $\frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{x - x^2} = x^a$ $a=-0.5$

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ:

19) $5^{\frac{t}{2}} = 5^{2t-1}$ $t=\frac{2}{3}$

20) $27^{-\frac{1}{c}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{c-\frac{5}{2}}$ $c=-\frac{1}{2}, c=3$

21) $432 = 3^{x+1} \times 2^{2x}$ $x=2$

22) $500 = \frac{2^{\frac{1}{2}-x}}{5^{2x}}$ $x=-\frac{3}{2}$

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي:

23) $36^{x+4} = 6^y$
$36^y = 36^{x+6}$
$(-2, 4)$

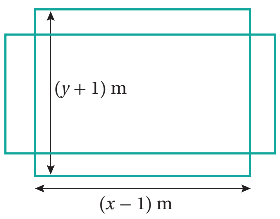
24) $5^{2x+4} = 5^{y-3}$
$7^{y-x} = 49$
$(-5, -3)$

25) عددانِ مجموعُ مربعَيْهِما 85 ومربعُ مجموعِهِما 121، ما هُما؟
$2, 9$ or $-2, -9$

26) يمثلُ كلٌّ مِنْ X, Y عددَينِ مفقودَينِ في الرقْمِ السّرّيِّ $XY1290$. إذا كانَ مجموعُ العددَينِ المفقودَينِ 12 ومجموعُ مربعَيهِما يساوي 90، فأجدُ قيمةَ كلٍّ منهُما. $3, 9$

27) **تنسٌ:** ملعبُ تنسٍ طولُهُ x مترًا وعرضُهُ y مترًا ومِساحتُهُ $224\ m^2$، إذا تمّت زيادةُ عرضه بمقدارِ $1\ m$ وتقليل طوله بمقدارِ $1\ m$ فازدادَتْ مساحتُهُ بمقدارِ $1\ m^2$ كما في الشكل الآتي، فأجدُ أبعادَ ملعبِ التنسِ.

الطول $16\ m$، والعرض $14\ m$



تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

28) أَجِدُ جميعَ قيمِ p التي تجعلُ منحنى المعادلةِ الخطِّيةِ $y = 2x + p$ لا يقطعُ منحنى المعادلةِ $y = x^2 + 3x - 1$. $p < -1.25$

29) أجدُ الأعدادَ الصحيحةَ الموجبةَ a,b,c إذا كانَ $(ab^c)^3 = 27b^{21}$ $a=3, c=7, b \geq 2$

30) أجدُ العددَينِ اللذَينِ ناتجُ جمعِ القوة الخامسة لأحدِهِما مَعَ مربعِ العددِ الثاني يساوي 268

العددان هما 3، و 5

كتاب التمارين

الوحدةُ 1: الأسسُ والمعادلاتُ — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمثالِ المعطى.

حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ: إخراجُ العاملِ المشتركِ الأكبرِ (الدرسُ 1)

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1) $x^2 - 3x = 0$ $\quad x = 3, x = 0$

2) $8x^2 = -12x$ $\quad x = \frac{-3}{2}, x = 0$

3) $4x^2 + 9x = 0$ $\quad x = \frac{-9}{4}, x = 0$

4) $7x^2 = 6x$ $\quad x = \frac{6}{7}, x = 0$

مثالٌ: أحلُّ المعادلةَ $6x^2 = 20x$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$6x^2 = 20x$
بطرحِ $20x$ مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ	$6x^2 - 20x = 0$
بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ	$2x(3x - 10) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$2x = 0$ or $3x - 10 = 0$
بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ	$x = 0 \qquad x = \frac{10}{3}$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, \frac{10}{3}$

التحقُّقُ: أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ: الصورةُ القياسيةُ $x^2 + bx + c = 0$ (الدرسُ 1)

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

5) $x^2 - 2x - 15 = 0$ $\quad x = -3, x = 5$

6) $t^2 - 8t + 16 = 0$ $\quad t = 4$

7) $x^2 - 18x = -32$ $\quad x = 16, x = 2$

8) $x^2 + 2x = 24$ $\quad x = -6, x = 4$

9) $x^2 = 17x - 72$ $\quad x = 8, x = 9$

10) $x^2 + 5x + 4 = 0$ $\quad x = -1, x = -4$

11) $s^2 + 20s + 100 = 0$ $\quad s = -10$

12) $y^2 + 8y = 20$ $\quad y = -10, y = 2$

13) $m^2 - 12m + 32 = 0$ $\quad m = 8, m = 4$

6

الوحدةُ 1: الأسسُ والمعادلاتُ — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

مثالٌ: أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $x^2 + 6x + 8 = 0$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$x^2 + 6x + 8 = 0$
بالتحليلِ إلى العواملِ	$(x + 4)(x + 2) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$x + 4 = 0$ or $x + 2 = 0$
بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ	$x = -4 \qquad x = -2$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-4, -2$

التحقُّقُ: أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتذكَّرُ

لتحليلِ ثلاثيِّ حدودٍ على الصورةِ $x^2 + bx + c$، حيثُ b وَ c عددانِ صحيحانِ، أبحثُ عنْ عددَيْنِ صحيحَيْنِ m وَ n مجموعُهُما يُساوي b، وحاصلُ ضربِهِما يُساوي c، ثمَّ أكتبُ $x^2 + bx + c$ على الصورةِ $(x+m)(x+n)$.

b) $x^2 + 5x = 6$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$x^2 + 5x = 6$
بطرحِ 6 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ	$x^2 + 5x - 6 = 0$
بالتحليلِ إلى العواملِ	$(x - 1)(x + 6) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$x - 1 = 0$ or $x + 6 = 0$
بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ	$x = 1 \qquad x = -6$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $1, -6$

التحقُّقُ: أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ: الصورةُ القياسيةُ $ax^2 + bx + c = 0$ (الدرسُ 1)

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

14) $24x^2 - 19x + 2 = 0$ $\quad x = \frac{2}{3}, x = \frac{1}{8}$

15) $18t^2 + 9t + 1 = 0$ $\quad t = -1, t = \frac{-1}{18}$

16) $5x^2 + 8x + 3 = 0$ $\quad x = -1, x = \frac{-3}{5}$

17) $5x^2 - 9x - 2 = 0$ $\quad x = 2, x = \frac{-1}{5}$

18) $4t^2 - 4t - 35 = 0$ $\quad t = -1, t = \frac{5}{2}$

19) $6x^2 + 15x - 9 = 0$ $\quad x = -3, x = \frac{1}{2}$

20) $28s^2 - 85s + 63 = 0$ $\quad s = \frac{7}{4}, s = \frac{9}{7}$

21) $9d^2 - 24d - 9 = 0$ $\quad d = 3, d = \frac{-1}{3}$

22) $8x(x + 1) = 16$ $\quad x = 1, x = -2$

7

الوحدةُ 1: الأسسُ والمعادلاتُ — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

مثالٌ: أحلُّ المعادلةَ $30x^2 - 5x = 5$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$30x^2 - 5x = 5$
بطرحِ 5 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ	$30x^2 - 5x - 5 = 0$
بِقسمَةِ طرفَيِ المُعادلةِ على 5	$6x^2 - x - 1 = 0$
بالتحليلِ إلى العواملِ	$(3x + 1)(2x - 1) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$3x + 1 = 0$ or $2x - 1 = 0$
بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ	$x = -\frac{1}{3} \qquad x = \frac{1}{2}$

إذنْ، حَلّا المعادلةِ هما: $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

أتذكَّرُ

لتحليلِ ثلاثيِّ حدودٍ على الصورةِ $ax^2 + bx + c$، حيثُ a وَ b وَ c أعدادٌ صحيحةٌ، أَجِدُ عددَيْنِ صحيحَيْنِ m وَ n حاصلُ ضربِهِما يُساوي (ac)، ومجموعُهُما يُساوي b، ثمَّ أكتبُ $ax^2 + bx + c$ على الصورةِ $ax^2 + mx + nx + c$، ثمَّ أحلّلُ بتجميعِ الحدودِ.

تحديدُ عددِ حلولِ المعادلةِ التربيعيةِ (الدرسُ 1)

أُحدِّدُ عددَ حلولِ كلٍّ منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

23) $x^2 + 6x - 7 = 0$ $\quad 2$

24) $x^2 - 4x + 4 = 0$ $\quad 1$

25) $x^2 - 2x + 7 = 0$ $\quad 0$

مثالٌ: أحدّدُ عددَ حلولِ المعادلةِ الآتيةِ:

$$x^2 + x + 4 = 0$$

أحدّدُ قيمَ المعاملاتِ ثم أعوّضُها في صيغةِ المميزِ:

$a = 1, b = 1, c = 4$

صيغةُ المميِّزِ (Δ)	$\Delta = b^2 - 4ac$
بتعويضِ قِيَمِ المعاملاتِ والتبسيطِ	$= 1^2 - 4(1)(4) = -15$

قيمةُ المميِّزِ تُساوي -15 (سالبةٌ)، إذنْ: لا توجدُ حلولٌ حقيقيَّةٌ للمعادلةِ التربيعيَّةِ.

أتذكَّرُ

إذا كانت قيمةُ المميزِ موجبةً فإن للمعادلةِ التربيعيةِ حلّينِ، وإذا كانت قيمةُ المميزِ صفرًا فإن للمعادلةِ التربيعيةِ حلًّا واحدًا فقط.

حلُّ المعادلةِ التربيعيةِ بالقانونِ العامِ (الدرسُ 1)

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ باستعمالِ القانونِ العامِ:

26) $x^2 + x - 6 = 0$ $\quad x = -3, x = 2$

27) $x^2 + 4x - 1 = 0$ $\quad x = \frac{-4 + \sqrt{20}}{2}, x = \frac{-4 - \sqrt{20}}{2}$

28) $x^2 + 2x - 5 = 0$ $\quad x = \frac{-2 + \sqrt{24}}{2}, x = \frac{-2 - \sqrt{24}}{2}$

8

الوحدةُ 1: الأسسُ والمعادلاتُ — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

مثالٌ: أحلُّ المعادلةَ: $x^2 + 4x - 12 = 0$ باستعمالِ القانونِ العامِ.

لحلِّ المعادلةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أَجِدُ قيمَ المعاملاتِ:

$a = 1, b = 4, c = -12$

القانونُ العامُّ	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
بالتعويضِ والتبسيطِ	$= \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$
	$x = \frac{-4 - 8}{2} = -6, \quad x = \frac{-4 + 8}{2} = 2$

إذنْ، حَلّا المعادلةِ هما: $x = -6, x = 2$

حلُّ أنظمةِ المعادلاتِ الخطيةِ (الدرسُ 1)

أحلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ:

29) $4x + 3y = 11$, $2x + y = 5$ $\quad x = 2, y = 1$

30) $x - 2y = 1$, $2x - 4y = -3$ $\quad$ لا يوجد حل

31) $2x - 4y = 1$, $5x - 10y = \frac{5}{2}$ $\quad$ عدد لا نهائي من الحلول

مثالٌ: أَحُلُّ النظامَ الآتيَ باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

$y = x - 3 \quad (1)$

$3x - 2y = 10 \quad (2)$

الخطوةُ 1 أعوّضُ المعادلةَ (1) في المعادلةِ (2)، ثمَّ أحلُّ المعادلةَ الناتجةَ.

بفكِّ الأقواسِ	$3x - 2(x-3) = 10$
بالتبسيطِ	$3x - 2x + 6 = 10$
بالتبسيطِ	$x = 4$

الخطوةُ 2 أعوّضُ قيمةَ المُتغيِّرِ x في إحدى المعادلتيْنِ، ولتكنِ المعادلةَ (1) لإيجادِ قيمةِ y.

$y = 4 - 3 = 1$

إذنْ، حَلُّ النظامِ هوَ النقطةُ $(4, 1)$.

9

كتاب التمارين

تبسيطُ المقاديرِ الأُسّيّةِ باستعمالِ خصائصِ ضربِ القُوى (الدرسُ 3)

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

32. $(3a^3b^2)(4a^2b)$ $12a^5b^3$
33. $(7a^4b^5)(4ab^3)$ $28a^5b^8$
34. $(5x^2b^4)(2ab^{-3})$ $10bax^2$
35. $(x^5y^3)^3(xy^5)^2$ $x^{17}y^{19}$
36. $(x^4)^5(x^3y^2)^5$ $x^{35}y^{10}$
37. $(5a^3b^5)^4$ $625b^{20}a^{12}$

مثالٌ: أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $(3ry^5)(6r^2y^3)$

$(3ry^5)(6r^2y^3) = (3\times6)(r\times r^2)(y^5\times y^3)$ بإعادةِ تجميعِ الثوابتِ والمُتغيِّراتِ

$= (3\times6)(r^{1+2})(y^{5+3})$ ضربُ القوى

$= 18r^3y^8$ بالتبسيطِ

b) $(3r^4y^5)^3$

$(3r^4y^5)^3 = (3^3)(r^4)^3(y^5)^3$ قوّةُ ناتجِ الضّرب

$= (3^3)(r^{4\times3})(y^{5\times3})$ قوّةُ القوّةِ

$= 27r^{12}y^{15}$ بالتبسيطِ

تبسيطُ المقاديرِ الأُسّيّةِ باستعمالِ خصائصِ قسمةِ القُوى (الدرسُ 3)

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

38. $(6a^2b^3)(5a^{-4}b^{-5})$ $30a^{-2}b^{-2}$
39. $((-3x^2)^4)^{-7}$ $81^{-7}x^{-56}$
40. $(m^{-3}n^4)^{-5}$ $m^{15}n^{-20}$
41. $\frac{12a^2b^3}{6ab}$ $2ab^2$
42. $\frac{12a^{-3}b^4}{3a^2b^{-3}}$ $4a^{-5}b^7$
43. $\frac{(2a^2bc^2)(6abc^3)}{4ab^0c}$ $3a^2b^2c^4$

مثالٌ: أكتبُ $\frac{3x^4y^{-1}z^{-2}}{x^2y^0}$ في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا مِنَ المتغيراتِ لا يساوي صفرًا.

$\frac{3x^4y^{-1}z^{-2}}{x^2y^0} = \frac{3x^4y^{-1}z^{-2}}{x^2}$ $y^0 = 1$

$= 3\left(\frac{x^4}{x^2}\right)(y^{-1})(z^{-2})$ بإعادةِ تجميعِ المُتغيِّراتِ

$= 3(x^{4-2})(y^{-1})(z^{-2})$ قسمةُ القوى

$= 3(x^2)\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right)$ تعريفُ الأُسِّ السالبِ

$= \frac{3x^2}{yz^2}$ بالضربِ

الدرس 1
حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ
Solving a System of Linear and Quadratic Equations

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ، ثمَّ أتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1. $y = 7x + 15$, $y = 3x^2 + 5x - 2$ — $(-2.07, 0.5), (2{,}74, 34{,}16)$
2. $y - x = 1$, $y = 2x^2 - 11x + 16$ — $(1.77, 2.775), (4.22, 5.22)$
3. $y - x = 10$, $x^2 + y^2 = 50$ — $(-5, 5)$
4. $x + y = 20$, $x^2 - y^2 = 16$ — $(10.4, 9.6)$
5. $y - x = 0$, $y = x^2 + 3x + 2$ — لا يوجد حل للنظام.
6. $y = 2x - 5$, $y = x^2 - 2x$ — لا يوجد حل للنظام.
7. $y = x - 1$, $y = x^2 - 3x + 2$ — $(1, 0), (3, 2)$
8. $y - 2x = 1$, $y = 5x^2 + 4x - 1$ — $(-0.86, -0.73), (0.46, 1.93)$
9. $y - x + 1 = 0$, $y = x^2 + 3x$ — $(-1, -2)$
10. $y = 2$, $x^2 + y^2 = 4$ — $(0, 2)$
11. $y - x = 1$, $y = x^2 + 6x + 8$ — لا يوجد حل للنظام.
12. $y = 2 - 3x$, $y = x^2 - 4x + 3$ — لا يوجد حل للنظام.

13. **حدائقُ:** حديقةٌ مستطيلةُ الشكلِ، طولُ قُطْرِها 30 m، ومحيطُها 84 m. أَجِدُ بُعْدَيْها.
$x^2 + y^2 = 900$
$2x + 2y = 84$
$\Rightarrow (x, y) = (24, 18)$

14. **سَجّادٌ:** اشترَتْ ليلي سَجّادةً مستطيلةَ الشكلِ، طولُ قُطْرِها $\frac{1}{2}\sqrt{34}$ m، ومحيطُها 8 m. أَجِدُ بُعْدَيْها.
$x^2 + y^2 = \frac{34}{4}$, $2x + 2y = 8$, $(x, y) = (2.5, 1.5)$

15. **ادِّخارٌ:** إذا كانَ الفرقُ بينَ المبلغِ الذي ادَّخرَتْهُ رزانُ والمبلغُ الذي ادَّخرَتْهُ أختُها هديلُ هوَ دينارَيْنِ، وكانَ مجموعُ مربَّعَيْ ما معَهُما 74 دينارًا، فكمْ دينارًا ادَّخرَتْ كلٌّ منْهُما؟
$x - y = 2$, $x^2 + y^2 = 74$, $(x, y) = (7, 5)$

16. **نقودٌ:** قالَ مازنٌ إنَّ مجموعَ مالديَّ ولدى أخي منْ نقودٍ هوَ 7 دنانيرَ، وإنَّ الفرقَ بينَ مربَّعَيْ ما معَنا هوَ 7 دنانيرَ. كمْ دينارًا معَ مازنٍ وأخيهِ؟
$(4, 3)$

17. إذا قطعَ $y = 3x - 2$ المنحنى $y = x^2 - px + 2$ في نقطةٍ واحدةٍ، فما قيمةُ p؟ أنظر ملحق الإجابات.

كتاب التمارين

الدرس 2
حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ
Solving a System of Two Quadratic Equations

الوحدةُ 1: الأُسسُ والمعادلاتُ

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y = x^2 - 6x + 9$, $y = x^2 - 3x$ — $(3, 0)$

2) $y - 3x^2 = x + 2$, $y = -6x^2 + 7x$ — لا يوجد حل للنظام.

3) $y = 0.5x^2 + 0.5x + 1$, $y = -x^2 + 2x + 4$ — $(2, 4), (-1, 1)$

4) $y = 2x^2 + 8x + 4$, $y = x^2 + 2x + 4$ — $(0, 4), (-6, 28)$

5) $y - x^2 = 0$, $y + x^2 = 0$ — $(0, 0)$

6) $y = x^2 + x - 1$, $y = 5 - x^2$ — $(1.5, 2.75), (-2, 1)$

7) $y = x^2 + x + 2$, $y + x^2 + 2 = 0$ — لا يوجد حل للنظام.

8) $y = x^2 + 2x + 2$, $y = -x^2 - 2x + 2$ — $(0, 2), (-2, 2)$

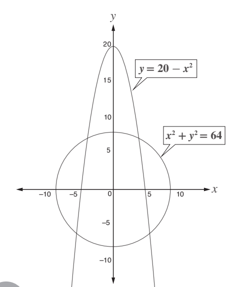
9) $y = -x^2 + 2x + 2$, $y = -x^2 - 2x + 2$ — $(0, 2)$

10) $y^2 = -x^2 + 4$, $y = 0.5x^2 - 2$ — $(0, -2), (-2, 0), (2, 0)$

11) $4y + 9x^2 = 25$, $y - x^2 = 3x - 4$ — $(1.37, 2.01), (-2.3, -5.62)$

12) $x^2 + y^2 = 16$, $y^2 = (x - 3)^2$ — $(3.898, 0.898), (3.898, -0.898)$ $(-0.898, 3.898), (-0.898, -3.898)$

13) **كرةُ طائرةٍ:** في أثناءِ لعبِ سـاميةَ وهندَ كرةَ الطائرةِ، رمَتْ سـاميةُ الكرةَ على شكلِ منحنًى معادلتُهُ $y = -x^2 + 3$، ثمَّ رمَتْ هندُ الكرةَ على شكلِ منحنًى معادلتُهُ $y = -x^2 + 2x$. أَجِدُ إحداثياتِ نقطةِ التقاءِ الكرتيْنِ.
$(1.5, 0.75)$



14) **أبراجٌ:** أرادَ مركزُ حراسةٍ إيجادَ نقاطِ التقاطعِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ لتركيبِ أبراجِ مراقبةٍ عندها. أَجِدُ إحداثياتِ هذِهِ النقاطِ.
$(3.58, 7.15), (-3.58, 7.15),$
$(5.11, -6,15), (-5.11, -6.15)$

إرشاد: لحل المسائل (14–11)، أستعمل القانون العام والآلة الحاسبة.

الدرس 3
تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ
Simplifying Exponential Expressions

الوحدةُ 1: الأُسسُ والمعادلاتُ

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $16^{\frac{1}{4}}$ — 2
2) $36^{\frac{3}{2}}$ — 216
3) $32^{-\frac{3}{5}}$ — $\frac{1}{8}$
4) $(81)^{\frac{1}{4}}$ — 3
5) $(-27)^{\frac{2}{3}}$ — 9
6) $(-64)^{\frac{2}{3}}$ — 16
7) $1^{-\frac{4}{9}}$ — 1
8) $25^{-\frac{3}{2}}$ — $\frac{1}{125}$

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

9) $y^{\frac{4}{3}} \times y^{-\frac{5}{2}}$ — $\frac{1}{y^{\frac{7}{6}}}$
10) $z^{\frac{7}{2}} \times z^{-\frac{3}{4}}$ — $z^{\frac{11}{4}}$
11) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{5}{2}}$ — $\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$
12) $\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{7}{3}}$ — $\frac{1}{x^{\frac{7}{4}}}$
13) $\frac{x^{\frac{2}{7}}}{x^{-\frac{3}{5}}}$ — $x^{\frac{31}{35}}$
14) $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{-\frac{1}{4}}}$ — x
15) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{3}{7}}$ — $\frac{y^{\frac{3}{7}}}{x^{\frac{3}{7}}}$
16) $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}$ — $\frac{1}{x^{\frac{7}{15}}}$

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

17) $\frac{8x^{-\frac{7}{2}}y^{\frac{1}{3}}}{2x^{\frac{5}{2}}y}$ — $\frac{4}{x^6 y^{\frac{2}{3}}}$
18) $\frac{10xy^{-\frac{3}{4}}}{5x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{4}{3}}}$ — $\frac{2x^{\frac{8}{3}}}{y^{\frac{25}{12}}}$
19) $\frac{\left(4y^{-\frac{7}{3}}\right) \times \left(24xy^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(2x^{\frac{5}{3}}y\right)\left(y^{-\frac{5}{2}}\right)}$ — $\frac{48y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$
20) $\frac{\left(125y^{-\frac{2}{5}}\right) \times \left(10x^{\frac{2}{7}}y^{\frac{1}{5}}\right)}{\left(5xy^{-\frac{5}{2}}\right)\left(y^{-\frac{7}{5}}\right)}$ — $\frac{250y^{\frac{37}{10}}}{x^{\frac{5}{7}}}$
21) $\sqrt[3]{2x^{27}y^9}$ — $\sqrt[3]{2}x^9y^3$
22) $\sqrt{9x^8y^4}$ — $3x^4y^2$

23) **بكتيريا:** تتضاعفُ عيِّنةُ بكتيريا مخبريةٍ 4 مَرّاتٍ كلَّ أسـبوعٍ. إذا كانَ في العيِّنـةِ 3500 خليةٍ بكتيريةٍ اليومَ، فكمْ يصبحُ عددُها بعدَ مرورِ 7 أسابيعَ؟ 57344000

الدرس 4
حَلُّ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ
Solving Exponential Equation

الوحدةُ 1: الأُسسُ والمعادلاتُ

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

1) $64 = (16)^{5x+7}$ — -1.1
2) $49 = (343)^{7x+1}$ — $-\frac{1}{21}$
3) $16^{2x+3} = 4^{x+1}$ — $-\frac{5}{3}$
4) $36^{3x-1} = 6^{x-2}$ — 0
5) $125^x = 5 \times \left(\frac{1}{25}\right)^x$ — $\frac{1}{5}$
6) $81^x = 3 \times \left(\frac{1}{9}\right)^x$ — $\frac{1}{6}$
7) $128^{5x-4} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ — $\frac{57}{70}$
8) $2^x = \frac{16^{2x}}{32^{x+1}}$ — $\frac{5}{2}$
9) $\frac{3^{x+2}}{9^{1-x}} = \frac{27^{2-x}}{3^{1-x}}$ — 1
10) $\frac{25^{\frac{x}{2}}}{125^{-x}} = \frac{5^{3x+1}}{25^x}$ — $\frac{1}{3}$
11) $\frac{8^{x-\frac{1}{3}}}{64^{\frac{2x}{3}}} = \frac{4^{\frac{x}{2}}}{32^{-x}}$ — $-\frac{1}{7}$
12) $\frac{100^{2-\frac{x}{2}}}{1000^{\frac{x}{3}}} = \frac{1000^{\frac{x}{3}-1}}{100^{\frac{5x}{2}}}$ — $-\frac{7}{2}$

13) **كهرباءُ:** تقاسُ شِـدَّةُ التيـارِ الكهربائيِّ بوحدةِ الأمبيرِ A. إذا كانَتِ العلاقةُ بينَ شِـدَّةِ التيـارِ I والزمنِ بالثواني t هيَ: $I = 2^{-t}$، فبعدَ كمْ ثانيةً تصبحُ شِدَّةُ التيارِ $0.125\ A$؟ 3 ثوانٍ

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةِ:

14) $125^x \times 25^{-y} = 625$, $4^x \times 2^y = 8$ — $\left(\frac{10}{7}, \frac{1}{7}\right)$
15) $16^x \times 2^{3y} = 2048$, $49^x \times 7^y = 16807$ — $(2, 1)$
16) $25^x \times 5^y = 125$, $4^{2x} \times 2^{2y} = 64$ — له عـدد لانهائي من الحلول هي كل أزواج الأعداد الحقيقية على الصورة $(x, 3 - 2x)$
17) $27^x \times 9^{2y} = 81$, $2^{5x} \times 32^y = 128$ — $\left(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الأُسّيّةِ الآتيةِ بيانيًّا:

18) $\left(\frac{1}{2}\right)^{7x+1} = -9$ — ليس لها حل
19) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} = 10$ — -5.096
20) $2^{x+6} = 2x + 15$ — $-2.753, -7.296$
21) $3x - 2 = 5^{x-1}$ — $1, 1.707$

إجابات الأسئلة في صفحة 16:

16) أفترض أنَّ عمر شيماء هو x، وأنَّ عمر ريّان هو y:

$$x = y + 4$$
$$x^2 + y^2 = 346$$
$$\Rightarrow (15, 11)$$

أيْ إنَّ عمر شيماء هو 15 عامًا، وعمر ريّان هو 11 عامًا.

17) أفترض أنَّ الطول هو x، وأنَّ العرض هو y:

$$x = 2y$$
$$x^2 + y^2 = 1.25$$
$$\Rightarrow (1, 0.5)$$

التكلفة = طول المحيط × سعر المتر الواحد= 6.75 دنانير.

18) أفترض أنَّ طول ضلع المنطقة المزروعة بالبطاطا هو x.

إذن، طول ضلع المنطقة المزروعة بالطماطم هو: $x + 1$

$$(x + 1)^2 + x^2 = 41$$
$$x^2 + x - 20 = 0$$
$$x = 4$$

أيْ إنَّ طول ضلع المنطقة المزروعة بالبطاطا هو 4 أمتار، وطول ضلع المنطقة المزروعة بالطماطم هو 5 أمتار.

19) نقطة اصطدام القذيفة بسفح التلة هي نقطة تقاطع المنحنى: $y = 2 + 0.12x - 0.002x^2$، مع المستقيم: $y = 0.15x$ في الربع الأوَّل، ونجدها بحل النظام المُكوَّن من هاتين المعادلتين.

بمساواة y من المعادلتين، فإنَّ:

$$2 + 0.12x - 0.002x^2 = 0.15x$$

وبقسمة طرفي هذه المعادلة على 0.002، تنتج المعادلة:

$$1000 + 60x - x^2 = 75x \Rightarrow x^2 + 15x - 1000 = 0$$
$$(x - 25)(x + 40) = 0$$
$$x = 25 \quad \text{or} \quad x = -40$$

وبما أنَّ النقطة في الربع الأوَّل، فإنَّ: $x = 25$، و $y = 0.15x = 3.75$

أيْ إنَّ القذيفة تصطدم بسفح التلة عند النقطة $(25, 3.75)$

20) بحل المعادلتين، يتبيَّن عدم وجود حل للنظام؛ ما يعني عدم وصول المياه إلى وحدة الإنارة.

21) أُعوِّض المعادلة الخطية في المعادلة التربيعية:

$$y = 2x^2 + 3x - 5$$
$$3x + p = 2x^2 + 3x - 5$$
$$2x^2 - (5 + p) = 0$$

المُميِّز يساوي صفرًا؛ لأنَّه يوجد حل واحد فقط.

إذن:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (0)^2 + 4(2)(5+p) = 0$$
$$40 + 8p = 0$$
$$p = -5$$

22) معادلة المستقيم المائل الأزرق المار بالنقطتين: $(-4, 1), (4,4)$ هي:

$$y-1 = \frac{4-1}{4-(-4)}(x-(-4)) \Rightarrow y = \frac{3}{8}x + \frac{5}{2}$$

أجد نقاط تقاطع المستقيم: $y = \frac{3}{8}x + \frac{5}{2}$، مع المنحنى: $y = -0.3x^2 + 4$

$$\frac{3}{8}x + \frac{5}{2} = -0.3x^2 + 4 \overset{\times 40}{\Rightarrow} 15x + 100 = -12x^2 + 160$$
$$12x^2 + 15x - 60 = 0$$
$$4x^2 + 5x - 20 = 0$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(4)(-20)}}{2(4)}$$
$$= \frac{-5 \pm \sqrt{345}}{8}$$
$$x_1 \approx -2.947, x_2 \approx 1.697$$
$$y_1 \approx 4 - 0.3(2.947)^2 \approx 1.395, y_2 \approx 4 - 0.3(1.697)^2 \approx 3.136$$

مساحة شبه المنحرف= نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين مضروبًا في الارتفاع

$$A = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1)$$
$$\approx \frac{1.395 + 3.136}{2}(1.697 - (-2.947)) \approx 10.52$$

إذن، مساحة شبه المنحرف هي 10.52 وحدات مربعة.

إجابات الأسئلة في صفحة 21:

(أتحقَّق من فهمي 4):

$x^2 + y^2 = 16$	
$-x^2 + 3y = -12$	بإعادة الترتيب
$y^2 + 3y = 4$	بجمع المعادلتين
$y^2 + 3y - 4 = 0$	بإعادة الترتيب
$(y + 4)(y - 1) = 0$	بالتحليل
$y = -4, y = 1$	خاصية حاصل الضرب الصفري
$x^2 - (-4)^2 = 16$	بتعويض $y = -4$ في المعادلة الأولى
$x^2 = 0$	بالتبسيط
$x = 0$	بأخذ الجذر التربيعي للطرفين
$x^2 + (1)^2 = 16$	بتعويض $y = 1$ في المعادلة الأولى
$x^2 = 15$	بالتبسيط
$x = \pm\sqrt{15}$	بأخذ الجذر التربيعي للطرفين
$(0, -4), (\sqrt{15}, 1), (-\sqrt{15}, 1)$	الحلول الثلاثة هي:

للتحقُّق من صحة الحـل، أُوجِّه الطلبة إلى تعويـض كل حل من الحلول الثلاثة في معادلتي النظام، ثم أعرض أمامهم التمثيل البياني المرفق.

8) بجمع المعادلتين

$$+\begin{array}{r} x^2+y^2=16 \\ -x^2+y=-5 \\ \hline \end{array}$$

$y^2+y=11$
$y^2+y-11=0$
$y\approx 2.85, y\approx -3.85$
$x^2=2.85+5=7.85$
$x\approx 2.80, x\approx -2.80$
$x^2=-3.85+5=1.15$
$x\approx 1.07, x\approx -1.07$
$(2.80, 2.85), (-2.80, 2.85), (1.07, -3.85), (-1.07,-3.85)$

10) بطرح المعادلة (1) من (2)

$$-\begin{array}{l} x^2+(y-2)^2=4\rightarrow(1) \\ x^2+y^2=9\rightarrow(2) \\ \hline \end{array}$$

$y^2-(y-2)^2=5$
$y^2-y^2+4y-4=5$
$4y=9$
$y=\dfrac{9}{4}=2.25$
$x^2+(\dfrac{9}{4})^2=9$
$x=\pm\dfrac{\sqrt{63}}{4}$
$x\approx\pm 1.98$
$(1.98, 2.25), (-1.98, 2.25)$

إجابات الأسئلة في صفحة 22:

13)

$x^2+6x=-x^2+24x$
$\Rightarrow 2x^2-18x=0$
$\Rightarrow x^2-9x=0$
$\Rightarrow x(x-9)=0$
$\Rightarrow x=0, x=9$ تهمل $x=0$
$\Rightarrow (9.135)$

14)

$x^2-3xy+2y^2=0\Rightarrow(x-2y)(x-y)=0$
$\Rightarrow x=2y,\ \text{or}\ \ x=y$
$x=y\Rightarrow x^2+xy=x^2+x^2=2x^2=6$
$\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\ ,y=\pm\sqrt{3}$
$x=2y\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}x\Rightarrow x^2+xy=x^2+\dfrac{1}{2}x^2=\dfrac{3}{2}x^2=6$
$\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2\ ,y=\pm 1$

الحلول هي: $(\sqrt{3}\ ,\sqrt{3}\ ), (-\sqrt{3}\ ,-\sqrt{3}\ ), (2, 1), (-2, -1)$

17) أفترض أنَّ طول القاعدة هو $2x$، وأنَّ الارتفاع هو y:

$x^2+y^2=2500\Rightarrow y=\sqrt{2500-x^2}$
$\dfrac{1}{2}(2x)(y)=1200\Rightarrow xy=1200\Rightarrow x\sqrt{2500-x^2}=1200$
$\Rightarrow x^2(2500-x^2)=1440000$
$\Rightarrow x^4-2500x^2+1440000=0$
$u=x^2\Rightarrow u^2-2500u+1440000=0$
$u=\dfrac{2500\pm\sqrt{490000}}{2}\Rightarrow u=1600, u=900$
$x^2=1600\Rightarrow x=40, y=30$
$x^2=900\Rightarrow x=30, y=40$

أيْ إنَّ طول القاعدة = 80 m، والارتفاع= 30 m

أو:

طول القاعدة = 60 m، والارتفاع = 40 m

19) أفترض أنَّ طول الورقة هو x، وعرضها هو y، وطول نصف قُطْر قاعدة الأسـطوانة هو r، فتكون المعادلة الأولـى: $xy=216$، وتكون المعادلة الثانية $r^2\pi x=224$، وعرض الورقة هو محيط قاعدة الأسطوانة، أي أن:

$$y=2\pi r\ \Rightarrow\ r=\frac{y}{2\pi}$$

وبتعويض $r=\dfrac{y}{2\pi}$ في المعادلة الثانية، فإنَّ:

$$\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2(\pi x)=224\ \Rightarrow\ y^2x=896\pi$$

$$\Rightarrow\ y^2\left(\frac{216}{y}\right)=896\pi\Rightarrow y=\frac{896\pi}{216}=\frac{112\pi}{27}\approx 13\text{ cm}$$

وبتعويض قيمة y في المعادلة الأولى، فإنَّ:

$$x=\frac{216}{\frac{112\pi}{27}}=\frac{729}{14\pi}\approx 16.6\text{ cm}$$

إذن، طول قطعة الورق هو 16.6 cm تقريبًا، وعرضها 13 cm تقريبًا.

إجابات الأسئلة في صفحة 28:

20) أفترض أنَّ الزمن= x.

إذن:

عدد الخلايا البكتيرية هو 7300 عندما الزمن $x=0$.

$$y=7300\,(3)^x$$

عدد الخلايا بعد 5 أسابيع هو: $7300(3)^5=1773900$

21)

$$\frac{r^{\frac{1}{2}}(r+r^2)}{r(r+r^2)} = r^{\frac{1}{2}-1} = r^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{r}}$$

22)

$$\frac{y^{-\frac{1}{2}}(1-2y^{-1})}{y^{\frac{1}{2}}(1-2y^{-1})} = y^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = y^{-1} = \frac{1}{y}$$

23)

$$\frac{1+x+2x}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1+3x}{2\sqrt{x}}$$

إجابات الأسئلة في الصفحة 33:

24) حجـم متـوازي المسـتطيلات هـو V، والطـول $\imath$، والعرض w، والارتفاع h:

$$V = \imath \times w \times h$$

أُقسِّم الشكل إلى ثلاثة متوازي مستطيلات:

$$\text{الحجم} = 4^{2x+1} \times 2^x \times 5^{1+5x} + 8^{x+1} \times 2^x \times 5^{1+5x} + 4^{2x+1} \times 2^x \times 5^{1+5x}$$

$$V = 2(10)^{1+5x} + (2^{4x-3})(5^{1+5x})$$

25) لا، يوجد حل للمعادلة الأسية؛ لأنَّه لا يوجد حل للمعادلة:

$$2^x = -1$$

26) $x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} = 4$

تعريف الأس السالب	$x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} = 4$
بتوحيد المقام	$\frac{x+3}{x^{\frac{1}{2}}} = 4$
بالضرب التبادلي	$x+3 = 4x^{\frac{1}{2}}$
بتربيع الطرفين	$(x+3)^2 = (4x^{\frac{1}{2}})^2$
بالتبسيط	$x^2 + 6x + 9 = 16x$
يطرح $16x$ من الطرفين	$x^2 - 10x + 9 = 0$
بالتحليل	$(x-9)(x-1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x-9 = 0\ ,\ \text{or}\ x-1 = 0$
بحل كل معادلة لـ x	$x = 9\ ,\ x = 1$

27) $\frac{36^{x-y+1}}{54^{x+y-1}} = 48^{x+y}$

$$\frac{(2^2 \times 3^2)^{x-y+1}}{(2\times 3^3)^{x+y-1}} = (2^4 \times 3)^{x+y}$$

$$\frac{(2^{2x-2y+2})(3^{2x-2y+2})}{(2^{(x+y-1)})(3^{3x+3y-3})} = (2^{4x+4y})(3^{x+y})$$

$$(2^{x-3y+3})(3^{-x-5y+5}) = (2^{4x+4y})(3^{x+y})$$

بمقارنة الأسس في القوى المُتماثِلة في طرفي المعادلة، فإنَّ:

$x-3y+3 = 4x+4y$، و $-x-5y+5 = x+y$

وبإعادة ترتيب هاتين المعادلتين الخطيتين، تنتج المعادلتان:

$$3x + 7y = 3$$

$$2x + 6y = 5$$

وبحل هاتين المعادلتين الخطيتين، فإنَّ:

$x = -\frac{17}{4} = -4.25$، و $y = \frac{9}{4} = 2.25$

28)

$$\left.\begin{matrix} 2^x + 3^y = 10 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} = 29 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2^x + 3^y = 10 \\ 2(2^x) + 3(3^y) = 29 \end{matrix}\right\}$$

أفترض أنَّ $u = 2^x$، وأنَّ $v = 3^y$، فتتحوَّل المعادلتان إلى الصورة الآتية:

$$u + v = 10$$

$$2u + 3v = 29$$

وبحل هاتين المعادلتين الخطيتين، فإنَّ: $u = 1$، و $v = 9$

أيْ إنَّ: $2^x = 1 = 2^0 \Rightarrow x = 0$، و $3^y = 9 = 3^2 \Rightarrow y = 2$

إجابات أسئلة اختبار نهاية الوحدة، الصفحة 35:

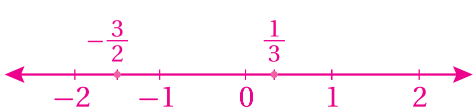
12) لحل المعادلتين: $y = 3-7x, y = 6x^2$، أُعوِّض قيمة y من إحداهما في الأخرى، فتنتج المعادلة:

$$6x^2 + 7x - 3 = 0$$

$$(3x-1)(2x+3) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}\ \text{or}\ x = -\frac{3}{2}$$

حل المتباينة: $3-7x < 6x^2$ يعني تحديد قِيَم x التي تجعل $(3-7x)$ أصغر من $6x^2$ ولأنَّ منحنيي هاتين العلاقتين يتقاطعان عندما $x = \frac{1}{3}$، و $x = -\frac{3}{2}$، أُقارِن بين قيمتي المقدارين $(3-7x)$، و $6x^2$ بجوار هذين العددين.

أرسم خط أعداد، ثم أُعيِّن عليه قِيَم x لنقطتي التقاطع:

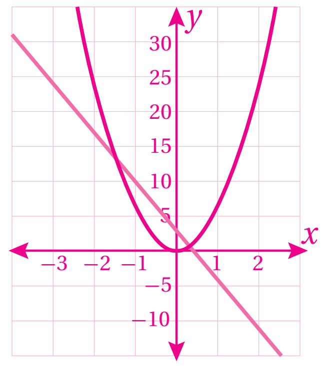


أختـــار عددًا بين $-\frac{3}{2}$ ، و $\frac{1}{3}$ مثل 0، وعددًا أقلَّ من $-\frac{3}{2}$ مثل -2، وعددًا أكبرَ من $\frac{1}{3}$ مثل 1، ثم أُعوِّض هذه الأعداد في المقدارين $(3-7x)$، و $6x^2$، ثم أُقارِن بين النتائج كما في الجدول الآتي:

x	-2	0	1
$3-7x$	17	3	-4
$6x^2$	24	0	6
أيهما أصغر؟	$3-7x$	$6x^2$	$3-7x$

إذن، حل المتباينة: $3-7x < 6x^2$ هو مجموعة قِيَم x، حيث: $x < -\frac{3}{2}$ أو $x > \frac{1}{3}$.

أُلاحِظ من التمثيـــل البياني أنَّ منحنى $y = 3-7x$ يقـــع تحت منحنى $6x^2$ عندما $x < -\frac{3}{2}$ وكذلك عندما $x > \frac{1}{3}$.



إجابات أسئلة كتاب التمارين، الأسئلة في الصفحة 8:

17) $x^2 - px + 4 = 3x - 4$

$x^2 - (p+3)x + 8 = 0$

حتى يكون لهذه المعادلة حلان؛ يجـــب أنْ يكون مُميِّزها موجبًا. أجد أولًا أصفار المُميِّز:

$\Delta = (p+3)^2 - 32 = 0 \Longrightarrow p + 3 = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}$

$\Longrightarrow p = -3 \pm 4\sqrt{2}$

لتحديد قِيَم p التي تجعل المُميِّز موجبًا، أحســـب قيمته عند ثلاث قِيَم لـ p، إحداها تقع بين صفري المُميِّز مثل 0، والثانية أكبر من $-3 + 4\sqrt{2}$ مثل 4، والثالثة أصغر من $-3-4\sqrt{2}$ مثل -10

$p = 0 \Longrightarrow (p+3)^2 - 32 = 9 - 32 = -23 < 0$

$p = 4 \Longrightarrow (p+3)^2 - 32 = 49 - 32 = 17 > 0$

$p = -10 \Longrightarrow (p+3)^2 - 32 = 49 - 32 = 17 > 0$

إذن، يتقاطع المســـتقيم والمنحنى في نقطتين إذا كانت $p > -3 + 4\sqrt{2}$، أو $p < -3 - 4\sqrt{2}$.

الوحدة 2

الدائرة

Circle

مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
الدرس 1: أوتار الدائرة وأقطارها ومماساتها.	• تعرُّف الوتر، والقُطْر، والمماس، والقاطع في الدائرة. • تعرُّف العلاقات بين الوتر والقُطْر والمماس والنظريات المرتبطة بها، وتوظيفها لإيجاد أطوال وقياسات زوايا مجهولة. • البرهنة على صحة علاقات باستعمال خصاص الأوتار والأقطار والمماسات.	الدائرة. مركز الدائرة. نصف القُطْر. القُطْر. الوتر. القاطع. المماس. نقطة التماس.	• المنقلة. • المسطرة. • الفرجار. • الآلة الحاسبة. • جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا.	4
الدرس 2: الأقواس والقطاعات الدائرية.	• حساب طول قوس من دائرة. • حساب مساحة القطاع الدائري. • حل مسائل عن طول القوس ومساحة القطاع الدائري.	القوس. القطاع الدائري.	• المنقلة. • المسطرة. • الفرجار. • الآلة الحاسبة. • جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا.	3
الدرس 3: الزوايا في الدائرة.	• تعرُّف الزاوية المركزية والزاوية المحيطية والعلاقة بينهما. • تعرُّف العلاقة بين قياسات الزوايا المحيطية المشتركة في القوس نفسه. • تعرُّف الشكل الرباعي الدائري وخصائصه. • تعرُّف الزاوية المماسية وعلاقتها بالزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه. • توظيف هذه العلاقات لإيجاد قياسات زوايا مجهولة في الدائرة.	الزاوية المركزية. الزاوية المحيطية. الزاوية المقابلة لقُطْر الدائرة. الزاوية المماسية. القوس المقابل. الشكل الرباعي الدائري.	• المنقلة. • المسطرة. • الفرجار. • الآلة الحاسبة. • جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا. • ورقة المصادر 1	3
الدرس 4: معادلة الدائرة.	• تعرُّف الصورة القياسية والصورة العامة لمعادلة الدائرة. • كتابة معادلة دائرة عُلِم مركزها وطول نصف قُطْرها. • إيجاد إحداثيي المركز وطول نصف القُطْر من معادلة الدائرة. • تحديد إنْ كان مستقيم معطى يُشكِّل مماسًّا أم لا لدائرة أُعطِيت معادلتها. • إيجاد طول القطعة المماسية من نقطة خارجية إلى نقطة التماس على دائرة عُلِمت معادلتها.	معادلة الدائرة. الصورة القياسية لمعادلة الدائرة. الصورة العامة لمعادلة الدائرة.	• جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا.	3
الدرس 5: الدوائر المتماسة.	• وصف أوضاع دائرتين في المستوى. • حساب طول المماس المشترك الداخلي والخارجي. • توظيف علاقة المسافة بين المركزين، وطولي نصفي القطرين لدائرتين، وطول المماس المشترك في إيجاد أطوال مجهولة.	الدوائر المتماسة. المماس المشترك الداخلي. المماس المشترك الخارجي.	• جهاز الحاسوب.	3
توسع: الدوائر المتماسة.	• تعرُّف أوضاع دائرتين مرسومتين في مستوى واحد. • استكشاف علاقة المسافة بين المركزين، وطولي نصفي القُطْرين لدائرتين متماستين من الداخل أو من الخارج.		• برمجية جيوجبرا. • ورقة المصادر 2	1
عرض نتائج مشروع الوحدة.			• جهاز الحاسوب.	1
اختبار نهاية الوحدة.				2
مجموع الحصص:				20 حصة

الوحدة 2

نظرة عامة على الوحدة:

تعلَّم الطلبة سابقًا الدائرة، ورسمها، وخصائصها، وحساب محيطها ومساحتها، وسيتعلَّمون في هذه الوحدة مماسات الدائرة، والعلاقات المختلفة بيـن أقطار الدائرة وأوتارها ومماسـاتها، ويتعرَّفـون الزوايا في الدائـرة، وخصائص المضلع الرباعي الدائري، وطول القوس، ومساحة القطاع الدائري، والصورتين القياسـية والعامـة لمعادلة الدائرة، ويكتبون معادلـة الدائـرة إذا توافرت معلومـات كافية، ويُميِّزون الدوائـر المتقاطعة والمتباعدة والمتماسـة من الداخل والمتماسـة من الخارج، ويحسبون طول المماس المشترك.

الوحدةُ 2

الدائرةُ

Circle

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُعَدُّ الدائرةُ أحدَ أكثرِ الأشكالِ ظهورًا على سطحِ الأرضِ، بلْ في جميعِ الكونِ. فهـيَ تظهـرُ جليًّا فـي بؤبؤِ العيـنِ، وفي الفاكهةِ، وجذوعِ الأشـجارِ، وغيرِ ذلكَ منَ المخلوقاتِ. وقدِ اسـتفادَ الإنسـانُ منَ الخصائصِ الفريدةِ لهذا الشكلِ المُعقَّدِ في مجالاتٍ عِدَّةٍ، مثلِ: الهندسـةِ، والصناعةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

✓ إيجادَ محيطِ الدائرةِ، ومساحتِها.

✓ تمييزَ حالاتِ تطابُقِ المثلثاتِ، وتشابُهِها.

✓ إيجـادَ مجموعِ قيـاسِ زوايا كلٍّ مـنَ المثلثِ، والشكلِ الرباعيِّ.

✓ إيجادَ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ في المستوى الإحداثيِّ، وإحداثياتِ نقطةِ المنتصفِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

◄ حسابَ طولِ القوسِ، ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ.

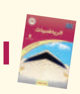
◄ العلاقاتِ بينَ الزوايا في الدائـرةِ، والإفادةَ منْها في إيجادِ زوايا مجهولةٍ.

◄ كتابةَ معادلةِ الدائرةِ، وإيجـادَ المركزِ ونصفِ القُطْرِ منْ معادلةِ دائرةٍ معلومةٍ.

◄ العلاقةَ بينَ دائرتيْنِ، وماهيةَ المماسّاتِ المشتركةِ.

36

الترابط الرأسي بين الصفوف



الصف التاسع

- إيجاد البُعْد بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

الصف الثامن

- تعرُّف نظريات المثلث المتطابق الضلعين.
- استخدام البرهان الهندسي في تشابه الأشكال الهندسية وتطابقها.
- تمييز حالات تشابه المثلثات وتطابقها.

الصف السابع

- حساب محيط الدائرة ومساحتها.

الصف العاشر

- تعرُّف خصائص الأوتار والأقطار والمماسات في الدائرة.
- حساب طول القوس ومساحة القطاع الدائري.
- تعرُّف العلاقات بين الزوايا في الدائرة وتوظيفها لإيجاد قياسات زوايا مجهولة.
- تعرُّف خصائص المضلع الرباعي الدائري.
- إيجاد معادلة الدائرة بصورها المختلفة.
- تعرُّف الأوضاع المختلفة لدائرتين في مستوى واحد.
- حساب طول المماس المشترك الداخلي أو الخارجي لدائرتين في مستوى واحد.

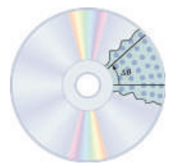
مشروعُ الوحدةِ

استعمالاتٌ علميةٌ لخصائصِ الدائرةِ

فكرةُ المشروعِ البحثُ عنِ استعمالاتٍ علميةٍ لخصائصِ الدائرةِ، ووصفِها، ونمذجتِها.

الموادُّ والأدواتُ شبكةُ الإنترنتْ، برمجيةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:



1. أبحثُ معَ أفرادِ مجموعتي في مكتبةِ المدرسةِ (أوْ في شبكةِ الإنترنتْ) عنْ نموذجٍ علميٍّ أوْ حياتيٍّ تُستعمَلُ فيهِ إحدى الخصائصِ الآتيةِ للدائرةِ:
   - العلاقةُ بينَ الزوايا المركزيةِ والزوايا المحيطيةِ.
   - العلاقةُ بينَ الزاويةِ المماسِّيةِ والزاويةِ المحيطيةِ المُشترِكةِ معَها في القوسِ نفسِهِ.
   - الدوائرُ المُتماسَّةُ.
   - معادلةُ الدائرةِ.
2. أكتبُ في مستندِ معالجِ النصوصِ (وورد) فقرةً أَصِفُ فيها النموذجَ الحياتيَّ أوِ العلميَّ الذي اخترتُهُ، مُحدِّدًا خصائصَ الدائرةِ الموجودةِ في هذا النموذجِ، ثمَّ أُفسِّرُها.
3. أُضيفُ إلى المستندِ صورًا توضيحيةً للنموذجِ، ذاكرًا مصدرَ المعلوماتِ والصورِ.
4. أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لرسمِ شكلٍ يُوضِّحُ استعمالَ الخاصيةِ في النموذجِ، وأضعُ عليْهِ قياساتِ الزوايا وأطوالَ الأضلاعِ جميعَها. وهذهِ بعضُ الإرشاداتِ التي قدْ تُساعِدُ على رسمِ الشكلِ التوضيحيِّ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا:
   - لرسمِ دائرةٍ، أنقرُ على أيقونةِ Circle with Center through Point منْ شريطِ الأدواتِ.
   - لإيجادِ قياسِ زاويةٍ، أنقرُ على أيقونةِ Angle ، ثمَّ على ضلعِ ابتداءِ الزاويةِ، وضلعِ انتهائِها.
   - لإيجادِ طولِ قطعةٍ مستقيمةٍ، أنقرُ على أيقونةِ cm Distance or Length ، ثمَّ على القطعةِ المستقيمةِ.
   - لرسمِ مماسٍّ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها، أُحدِّدُ أولًا النقطةَ بالنقرِ على أيقونةِ A Point ، ثمَّ أيقونةِ Tangents .

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا نُبيِّنُ فيهِ ما يأتي:

- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ والرسومِ، بما في ذلكَ صورةُ الشكلِ الذي رُسِمَ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.
- معلومةٌ جديدةٌ تعرَّفْناها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، ومُقترَحٌ لتوسعةِ المشروعِ.

37

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	اختيار تطبيق علمي أو عملي مناسب لخصائص الدائرة.			
2	مشاركة أفراد المجموعة جميعًا بفاعلية في المشروع.			
3	التحقُّق من صحة النموذج والصور والرسوم التوضيحية، ودقة الحسابات الخاصة بها واكتمالها.			
4	اتصاف التقرير المكتوب بأنَّه كامل ومُنظَّم.			
5	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			
6	عرض معلومة جديدة تعلَّمها أفراد المجموعة في أثناء البحث والعمل في المشروع.			
7	وجود مقترح مناسب لتوسعة المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.

2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.

3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة:
استعمالات علمية لخصائص الدائرة.

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى تنمية معرفة الطلبة بخصائص الدائرة، والبحث عن نماذج علمية أو تطبيقات حياتية تُستعمَل فيها إحدى هذه الخصائص أو أكثر، فضلًا عن تنمية مهارات البحث في مصادر المعرفة المتوافرة، والمهارات الشخصية، مثل: التواصل، وحل المشكلات.

خطوات تنفيذ المشروع

- أُعرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلُّم موضوعات الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أطلب إليهم أنْ يُوزِّعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لكل مجموعة.
- أذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، مثل: جهاز الحاسوب، وبرمجية جيوجبرا، وآلة التصوير، فضلًا عن بيان عناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع أوَّلًا بأوَّل، وتعزيزه بالصور المناسبة للموضوع.
- أطلب إلى أفراد كل مجموعة إعداد مشروع المجموعة، وكتابة تقرير مفصل عن عملهم، وكيف أسهم كلٌّ منهم في إنجاز المشروع، وبيان الصور والرسوم التوضيحية الكاملة، وإعداد عرض تقديمي (Power Point) للمشروع.
- أُبيِّن لأفراد المجموعات معايير تقييم المشروع، وأعرض عليهم أداة التقييم، مُنوِّهًا بأنَّه يمكنهم طرح أيِّ استفسارات عن المشروع في أثناء دراستهم هذه الوحدة.
- أُذكِّر أفراد المجموعات بوجوب إنجاز المشروع مع نهاية دراسة هذه الوحدة.

عرض النتائج

- ألفت انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، وإعداد عرض تقديمي يحوي صورًا لمراحل التنفيذ.
- أُوضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلُّب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارة حل المشكلات لديهم.
- أُنبِّه الطلبة إلى ضرورة تضمين العرض تقريرًا يشمل وصفًا للنموذج العلمي أو الحياتي، وتحديد خصائص الدائرة الموجودة في النموذج باستعمال برنامج معالج النصوص (word)، وبيان كيفية تطويره، وتوثيق مصادر الصور التي جمعوها؛ لتعزيز مهاراتهم المعلوماتية، وتدريبهم على أهمية توثيق المصادر.

الدرس 1

نتاجات الدرس

- تعرُّف الوتر، والقُطْر، والمماس، والقاطع في الدائرة.
- تحديد العلاقات التي تربط الأقطار والأوتار والمماسات في الدائرة.
- توظيف العلاقات بين الأقطار والأوتار والمماسات في إيجاد قياسات زوايا وأطوال مجهولة، وحل مسائل حياتية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية.
- استعمال مجموع قياسات زوايا المثلث، ومجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي لإيجاد قياسات زوايا مجهولة.
- استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين.
- استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع.
- تمييز حالات تطابق مثلثين (SSS, SAS, HL, ASA, AAS).

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرس 1

أوتارُ الدائرةِ، وأقطارُها، ومماسّاتُها
Chords, Diameters and Tangents of a Circle

فكرةُ الدرسِ معرفةُ الوترِ، والقُطْرِ، والمماسِّ، وخصائصِ كلٍّ منْها، والعلاقاتِ التي تربطُ بعضَها ببعضٍ، وتوظيفُ ذلكَ في إيجادِ أطوالِ وقياساتِ زوايا مجهولةٍ.

المصطلحاتُ الدائرةُ، مركزُ الدائرةِ، الوترُ، القوسُ، القُطْرُ، نصفُ القُطْرِ، المماسُّ، نقطةُ التَّماسِّ، القاطعُ.

مسألةُ اليومِ في حديقةِ منزلِ عبيرَ طاولةٌ دائريةٌ، وهيَ تريدُ عملَ فتحةٍ عندَ مركزِها لتثبيتِ عمودٍ يحمل مِظلَّةٍ بها. كيفَ يُمكِنُ لعبيرَ تحديدُ مركزِ الطاولةِ؟

الدائرةُ (circle) هيَ المحلُّ الهندسيُّ لنقطةٍ تتحرَّكُ في المستوى، بحيثُ تظلُّ على البُعْدِ نفسِهِ عنْ نقطةٍ مُحدَّدةٍ تُسمّى **مركزَ الدائرةِ** (center). أمّا **الوترُ** (chord) فهوَ قطعةٌ مستقيمةٌ تصلُ بينَ نقطتيْنِ على الدائرةِ، ويُسمّى الوترُ الذي يمرُّ بمركزِ الدائرةِ **القُطْرَ** (diameter). ويُطلَقُ على القطعةِ المستقيمةِ التي تصلُ مركزَ الدائرةِ بنقطةٍ عليْها اسمُ **نصفِ القُطْرِ** (radius).

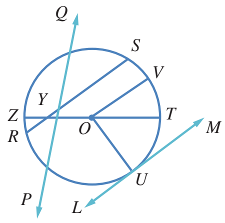
القاطعُ (secant) هوَ مستقيمٌ يقطعُ الدائرةَ في نقطتيْنِ، ويحوي وترًا فيها. أمّا المستقيمُ الذي يشتركُ معَ الدائرةِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ فيُسمّى **المماسَّ** (tangent). ويُطلَقُ على نقطةِ التقاءِ المماسِّ بالدائرةِ اسمُ **نقطةِ التَّماسِّ** (point of tangency).

رموزٌ رياضيةٌ

- ترمزُ $\overleftrightarrow{LM}$ إلى المستقيمِ LM.
- ترمزُ LM إلى طولِ القطعةِ المستقيمةِ. أمّا $\overline{LM}$ فترمزُ إلى القطعةِ المستقيمةِ نفسِها.

مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O. أُسمّي:



1. **مماسًّا للدائرةِ.**

$\overleftrightarrow{LM}$

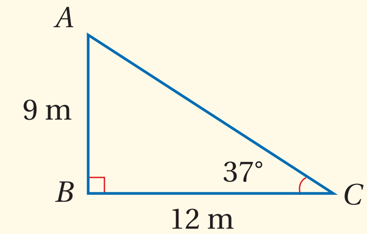
2. **أربعةَ أنصافِ أقطارٍ.**

$\overline{OV}$, $\overline{OT}$, $\overline{OZ}$, $\overline{OU}$

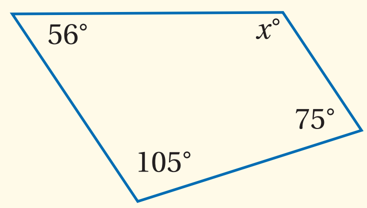
ملاحظاتي

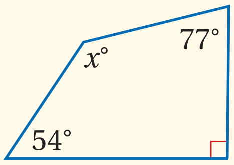
1 التهيئة

- أرسم المثلث ABC الآتي على اللوح، ثم أطلب إلى الطلبة إيجاد AC، وقياس الزاوية A.

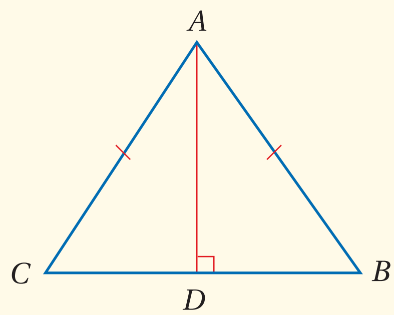


- أرسم الشكلين الرباعيين الآتيين، ثم أطلب إلى الطلبة إيجاد الزوايا المجهولة فيهما.





- أرســم مثلثًا متطابق الضلعين، ثم أرسم العمود $\overline{AD}$، وأطلب إلــى الطلبة أنْ يُبيِّنوا ســبب تطابق المثلثين ADC, ADB ويكتبوا ما ينتج من هذا التطابق.



2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » ما مركز الدائرة؟ نقطة داخل الدائرة تبعد المسافة نفسها عن نقاط الدائرة جميعها.
  » ماذا تُسمّى المسافة بين المركز وأيِّ نقطة على الدائرة؟ تُسمّى طول نصف قُطْر الدائرة.
  » ماذا تُسمّى القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتين على الدائرة؟ تُسمّى وترًا للدائرة.
  » إذا رسمت نصفي القُطْرين المارين بطرفي الوتر، فما نوع المثلث الناتج؟ متطابق الضلعين.
  » إذا رســمت عمودًا من مركز الدائرة إلى وتر في الدائرة، فمــا العلاقة بين المثلثين الناتجين؟ متطابقان.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أنْ أقول لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل أقول له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمَنْ يســتطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، أو أقول له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

3 التدريس

- أُذكِّر الطلبة بعناصر الدائرة (المركز، القُطْر، نصف القُطْر، الوتر).
- أُعرِّف القاطع، ومماس الدائرة.
- أرسم شكلًا، ثم أطلب إلى الطلبة أنْ يُسمّوا المركز، وقُطْرًا، ونصف قُطْر، ووترًا في الدائرة.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المســتخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

مثال 1

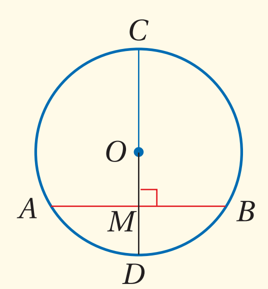
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1، مُبيِّنًا لهم عناصر الدائرة على الرسم، ثم أطلب إليهم ذكر أكثر من مثال على عناصر الدائرة، مثل: الوتر، ونصف القُطْر، والوتر، والمماس (إنْ أمكن)، مُؤكِّدًا – عن طريق المناقشة – إنَّ الرسم يحوي قُطْرًا واحدًا، ومماسًّا واحدًا فقط.

التقويم التكويني:

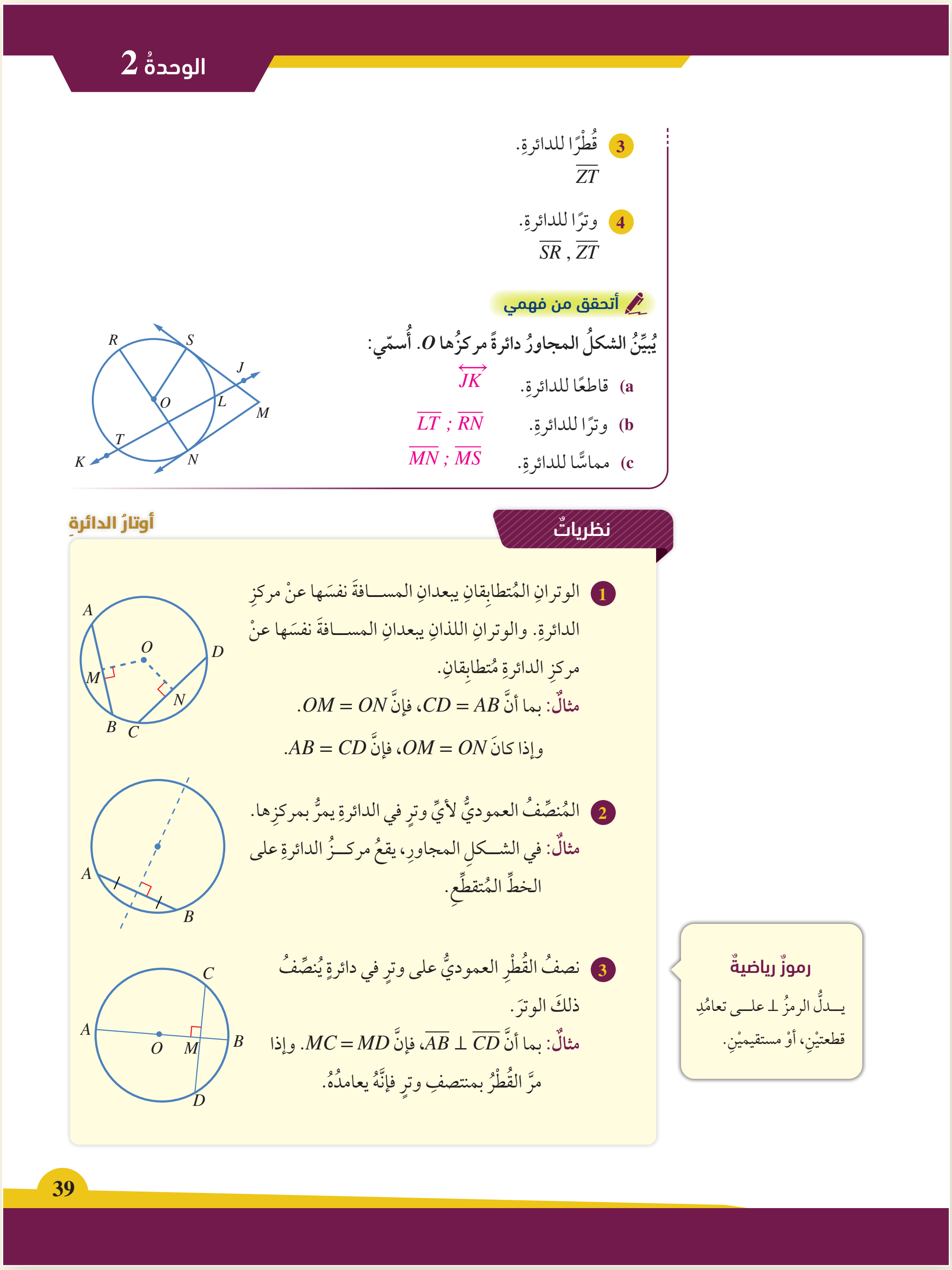
- أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أطلب إلى الطلبة رسم دائرة ووتر فيها، ثم رسم المنصف العمودي لهذا الوتر باستعمال المسطرة والفرجار، وملاحظة دلالة هذا المنصف للدائرة.
- أرسم دائرة مركزها O، وأرسم الوتر $\overline{AB}$ فيها، وأرسم القُطْر $\overline{CD}$ الذي يعامد $\overline{AB}$ في النقطة M، ثم أطلب إلى الطلبة تخيُّل أنَّ نهايتي الوتر $\overline{AB}$ تتحركان على الدائرة من دون تغيير طول $\overline{AB}$، وأنَّ القُطْر $\overline{CD}$ يتحرك أيضًا بحيث يظل متعامدًا مع الوتر $\overline{AB}$، ثم أسألهم:
  - » هل تتغيَّر المسافة بين مركز الدائرة والوتر؟ لا، لا تتغيَّر.
  - » ماذا تُمثِّل النقطة M بالنسبة إلى الوتر؟ تُمثِّل نقطة منتصفه.



- أُقدِّم النظريات الثلاث في الصفحة 39، ثم أُناقِشها مع الطلبة.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2، مُبيِّنًا لهم كيفية استعمال نظرية الأوتار المتطابقة لإيجاد أطوال مجهولة في الدائرة.



الوحدةُ 2

3 قُطْرًا للدائرةِ.
$\overline{ZT}$

4 وترًا للدائرةِ.
$\overline{SR}$, $\overline{ZT}$

أتحقق من فهمي

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O. أُسمّي:

a) قاطعًا للدائرةِ. $\overleftrightarrow{JK}$

b) وترًا للدائرةِ. $\overline{LT}$; $\overline{RN}$

c) مماسًّا للدائرةِ. $\overline{MN}$; $\overline{MS}$

نظرياتٌ — أوتارُ الدائرةِ

1 الوترانِ المُتطابِقانِ يبعدانِ المسافةَ نفسَها عنْ مركزِ الدائرةِ. والوترانِ اللذانِ يبعدانِ المسافةَ نفسَها عنْ مركزِ الدائرةِ مُتطابِقانِ.

مثالٌ: بما أنَّ $CD = AB$، فإنَّ $OM = ON$.

وإذا كانَ $OM = ON$، فإنَّ $AB = CD$.

2 المُنصِّفُ العموديُّ لأيِّ وترٍ في الدائرةِ يمرُّ بمركزِها.

مثالٌ: في الشكلِ المجاورِ، يقعُ مركزُ الدائرةِ على الخطِّ المُتقطِّعِ.

3 نصفُ القُطْرِ العموديُّ على وترٍ في دائرةٍ يُنصِّفُ ذلكَ الوترَ.

مثالٌ: بما أنَّ $\overline{AB} \perp \overline{CD}$، فإنَّ $MC = MD$. وإذا مرَّ القُطْرُ بمنتصفِ وترٍ فإنَّهُ يعامدُهُ.

رموزٌ رياضيةٌ

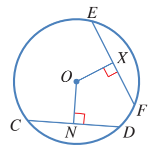
يدلُّ الرمزُ $\perp$ على تعامُدِ قطعتيْنِ، أوْ مستقيميْنِ.

39

إرشادات:

- أُوجِّه الطلبة إلى إمكانية استعمال البيكار (الفرجار مُدبَّب الطرفين) لمقارنة أطوال الأضلاع.
- أُذكِّر كل طالب/ طالبة بضرورة إحضار منقلة ومسطرة وفرجار لرسم الأشكال وقياس الزوايا والأطوال.

مثال 2

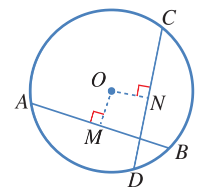


في الشكلِ المجاورِ، $\overline{CD}$ وَ $\overline{EF}$ وترانِ في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ $ON = OX$ ، وَ $EF = 8\ cm$، فما طولُ $\overline{NC}$؟

ON وَ OX يُمثِّلانِ بُعْدَي الوتريْنِ CD وَ EF عنْ مركزِ الدائرةِ، وهما مُتطابِقانِ.

منْ معطياتِ السؤالِ	$ON = OX$
إذا تساوى بُعْدا وتريْنِ عنْ مركزِ الدائرةِ، فهما مُتطابِقانِ	$CD = EF$
نصفُ القُطْرِ العموديِّ على وترٍ يُنصِّفُهُ	$NC = \frac{1}{2}\, CD$
الوترانِ $\overline{CD}$ وَ $\overline{EF}$ مُتطابِقانِ	$= \frac{1}{2}\, EF$
بالتعويضِ	$= \frac{1}{2}(8) = 4\,cm$

أتحقق من فهمي



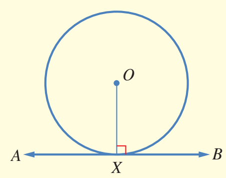
في الشكلِ المجاورِ، $\overline{AB}$ وَ $\overline{CD}$ وترانِ في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ $OM = ON$، وَ $CN = 12\ cm$، فما طولُ $\overline{AB}$؟ 24 cm

نظرياتٌ
مماسّاتُ الدائرةِ

1 مماسُّ الدائرةِ يكونُ عموديًّا على نصفِ القُطْرِ المرسومِ منْ نقطةِ التَّماسِّ.

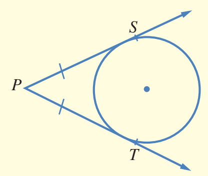
مثالٌ: نصفُ القُطْرِ $\overline{OX}$ عموديٌّ على المماسِّ $\overleftrightarrow{AB}$.

$\overline{OX} \perp \overleftrightarrow{AB}$



2 المماسّانِ المرسومانِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها لهُما الطولُ نفسُهُ.

مثالٌ: $\overline{PS}$ وَ $\overline{PT}$ لهُما الطولُ نفسُهُ: $PS = PT$.

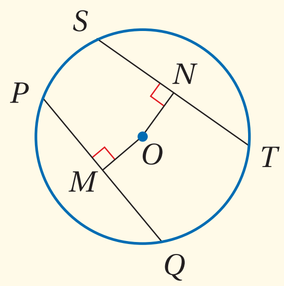


رموزٌ رياضيةٌ

يدلُّ $\overleftrightarrow{PT}$ على مماسِّ الدائرةِ. أمّا $\overline{PT}$ فيدلُّ على القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ النقطةِ P ونقطةِ التَّماسِّ، ويدلُّ الرمزُ PT على طولِ هذهِ القطعةِ.

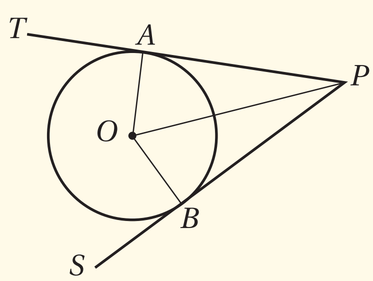
مثال إضافي:

في الشكل الآتي، إذا كان $OM = ON$، وكان $ST = 3x - 4$، وكان $PQ = x + 6$، فأجد SN. 5.5



مثال 3

- أطلب إلى الطلبة رسم دائرة، ومماسين لها من نقطة خارجها، ثم رسم نصفي القُطْرين المارين بنقطتي التماس، ثم وصل مركز الدائرة بالنقطة التي رُسِم منها المماسان كما في الشكل الآتي، ثم قياس الزاويتين OAP، و OBP، وقياس طولي $\overline{BP}$، و $\overline{AP}$، ثم تدوين ملاحظاتهم.



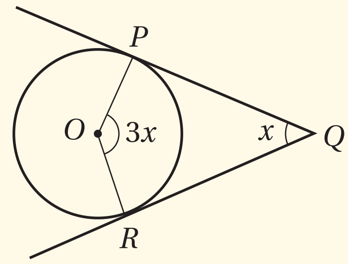
- أُقدِّم النظريتين في الصفحة 40، ثم أُناقِشهما مع الطلبة.

إرشاد: ألفت انتباه الطلبة إلى أنَّه يمكنهم استعمال حافة المسطرة، أو حافة المثلث القائم من أدوات الهندسة، أو حافة الدفتر لتحديد إذا كان المماس عموديًّا على نصف القُطْر أم لا.

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3، مُبيِّنًا لهم كيفية استعمال نظريات مماسات الدائرة لإيجاد أطوال وزوايا مجهولة في الدائرة.

مثال إضافي:

في الشكل الآتي، $\overrightarrow{QP}$ ، و $\overrightarrow{QR}$ مماسان للدائرة. أجد قيمة x. $45°$

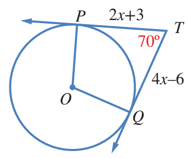


تنويع التعليم:

- أطلب إلى الطلبة ذوي المستوى فوق المتوسط بيان طريقة رسم مماس لدائرة من نقطة عليها.
  رسم نصف قُطْر، ثم إنشاء عمود عليه من طرفه على الدائرة باستعمال الفرجار والمسطرة.

مثال 3

في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{TP}$ وَ $\overleftrightarrow{TQ}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:



1 أجِدُ قيمةَ x.

مماسّانِ مرسومانِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها	$TP = TQ$
بالتعويضِ	$2x + 3 = 4x - 6$
بإضافةِ $6 - 2x$ إلى الطرفيْنِ	$2x + 3 + 6 - 2x = 4x - 6 + 6 - 2x$
بالتبسيطِ	$9 = 2x$
	$x = \frac{9}{2}$

2 أجِدُ قياسَ الزاويةِ POQ.

أفترِضُ أنَّ قياسَ الزاويةِ POQ هوَ y:

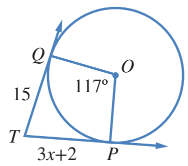
مماسُّ الدائرةِ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ في نقطةِ التّماسِّ	$m\angle OQT = m\angle OPT = 90°$
مجموعُ قياسِ الزوايا الداخليةِ للشكلِ الرباعيِّ هو $360°$	$90° + 70° + 90° + y = 360°$
بالتبسيطِ	$250° + y = 360°$
بطرحِ $250°$ منَ الطرفيْنِ	$y = 360° - 250° = 110°$

رموزٌ رياضيةٌ

يرمزُ الحرفُ m في $m\angle OQT$ إلى قياسِ الزاويةِ OQT.

أتحقق من فهمي

في الشكلِ المجاورِ، $\overrightarrow{TP}$ وَ $\overrightarrow{TQ}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:

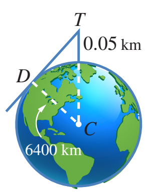


a) أجِدُ قيمةَ x. 4.33

b) أجِدُ قياسَ الزاويةِ PTQ. $63°$

مثال 4: من الحياة

أبراجٌ: يرتفعُ برجُ مراقبةٍ 50 m عنْ مستوى الأرضِ. ما أبعدُ نقطةٍ على الأرضِ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمّةِ البرجِ، بافتراضِ أنَّ الأرضَ كرةٌ طولُ نصفِ قُطْرِها 6400 km تقريبًا؟



أرسمُ مُخطَّطًا يُمثِّلُ المسألةَ.

الدائرةُ تُمثِّـلُ الأرضَ، والنقطةُ T تُمثِّلُ قمَّةَ البرجِ، والممـاسُّ $\overleftrightarrow{TD}$ يُمثِّلُ خطَّ البصرِ، ونقطةُ التَّماسِّ D هيَ أبعدُ نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمَّةِ البرجِ. ارتفاعُ البرجِ $50 \text{ m} = 0.05 \text{ km}$

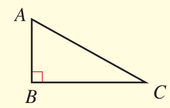
المماسُّ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ عندَ نقطةِ التَّماسِّ	$m\angle TDC = 90^\circ$
نظريةُ فيثاغورس	$(CT)^2 = (TD)^2 + (CD)^2$
بالتعويضِ	$(6400 + 0.05)^2 = (TD)^2 + (6400)^2$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$40960640.0025 = (TD)^2 + 40960000$
بطرحِ 40960000 منَ الطرفيْنِ	$640.0025 = (TD)^2$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ	$25.3 \approx TD$

إذنْ، المسـافةُ التـي تُمثِّـلُ أبعدَ نقطةٍ علـى الأرضِ يُمكِنُ مشـاهدَتُها منْ قمَّـةِ البرجِ هيَ: 25 km تقريبًا.

أَتذكَّرُ

نظريةُ فيثاغـورس: إذا كانَ المثلثُ ABC قائمَ الزاويةِ في B، فإنَّ:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$



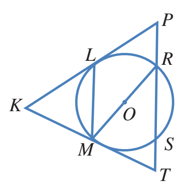
أتحقق من فهمي

برجُ مراقبةٍ: تبعدُ أقصى نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمَّةِ برجِ مراقبةٍ مسافةَ 32 km عنْهُ. ما ارتفاعُ قمَّةِ البرجِ عنْ سطحِ الأرضِ، بافتراضِ أنَّ الأرضَ كرةٌ طولُ نصفِ قُطرِها 6400 km تقريبًا.

80 m

أتدرب وأحل المسائل

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O. أُسمّي:



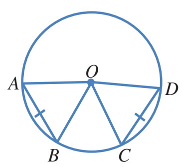
1) نصفَيْ قُطْريْنِ. $\overline{OR}$; $\overline{OM}$

2) وتريْنِ. $\overline{LM}$; $\overline{MR}$; $\overline{RS}$

3) مماسَّيْنِ. $\overrightarrow{KP}$; $\overrightarrow{KT}$

4) قاطعًا. $\overleftrightarrow{PT}$

$\overline{AB}$ وَ $\overline{CD}$ وترانِ لهُما الطولُ نفسُهُ في دائرةٍ مركزُها O:



5) ما نوعُ المثلثِ AOB؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.

6) هلِ المثلثانِ AOB وَ COD مُتطابقانِ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.

7) إذا كانَ قياسُ الزاويةِ OAB هوَ $65°$، فما قياسُ الزاويةِ COD؟ $50°$

إجابات الأسئلة:

5) متطابق الضلعين؛ لأنَّ $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ نصفا قُطرين في الدائرة، فهما متطابقان.

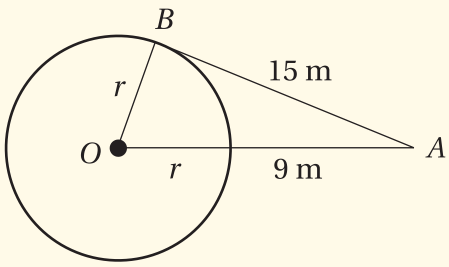
6) نعم؛ لأنَّ أضلاعهما المتناظرة متطابقة.
$OA = OC, OB = OD, AB = CD$

مثال 4: من الحياة

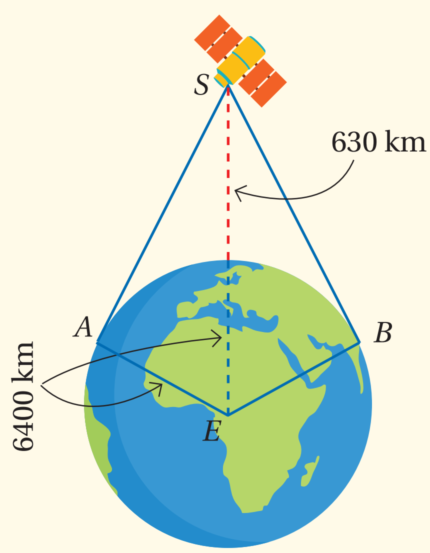
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4، مُبيِّنًا لهم كيفية توظيف خصائص مماسات الدائرة في موقف حياتي.

مثالان إضافيان:

1) يقف مسعود عند النقطة A التي تبعد مسافة 9 m عن حافة حلبة تزلج دائرية الشـكل، تبعد مسافة 15 m عـن نقطة التماس B بين خط بصـره وحافة الحلبة. أجد طول نصف قُطْر حلبة التزلج. 8 m



2) يرتفـع قمر صناعي 630 km عن سـطح الأرض، ويمكـن منه مشـاهدة المنطقـة المحصـورة بين المماسـين $\overline{SA}$، و $\overline{SB}$ من سطح الأرض. إذا كانت الأرض كـرة نصف قُطْرهـا 6400 km تقريبًا، فما طول المماس $\overline{SA}$؟ 2909 km تقريبًا.



4 التدريب

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1–14) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (24 – 22).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

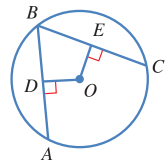
الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

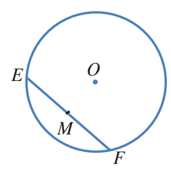
المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 15, 18, 19 كتاب التمارين: (1 – 4)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (19 – 21), 16, 17 كتاب التمارين: (3 – 6)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (20 – 24) كتاب التمارين: 7, 8

أخطاء شائعة:

قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في حل مسائل تتعلق بالزوايا في الدائرة، وبخاصة عندما يكون المطلوب إيجاد أكثر من زاوية واحدة في الشكل؛ لذا أُوجِّههم إلى كتابة جميع الزوايا التي يعرفونها على الشكل قبل البدء بالحل.



8 في الشكلِ المجاورِ، $\overline{AB}$ وَ $\overline{CB}$ وترانِ مُتطابِقانِ في دائرةٍ مركزُها O.
إذا كانَ $OE = x + 9$ ، وَ $OD = 3x - 7$، فما قيمةُ x؟ 8

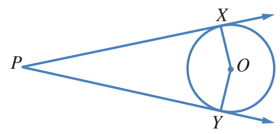


في الشكلِ المجاورِ، $\overline{EF}$ وترٌ في دائرةٍ مركزُها O، والنقطةُ M هيَ منتصفُ الوترِ $\overline{EF}$:

9 هلِ المثلثانِ EOM، وَ FOM مُتطابِقانِ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.

10 هلِ الزاويةُ EMO قائمةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.

11 إذا كانَ قياسُ الزاويةِ MOF هوَ $72°$، فما قياسُ الزاويةِ MEO؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.

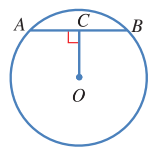


في الشكلِ المجاورِ، $\overrightarrow{PX}$ وَ $\overrightarrow{PY}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:

12 هلْ قياسُ الزاويةِ PXO هوَ $90°$؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.

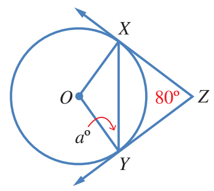
13 أُبيِّنُ أنَّ المثلثيْنِ XPO وَ YPO مُتطابِقانِ. أنظر ملحق الإجابات.

14 إذا كانَ قياسُ الزاويةِ XPO هوَ $17°$، فما قياسُ الزاويةِ XOY؟ $146°$



15 في الشكلِ المجاورِ، $\overline{AB}$ وترٌ طولُهُ 6 cm في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ ACO هوَ $90°$، وَ $OC = 4$ cm، فما طولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ؟ 5 cm

16 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. أنظر ملحق الإجابات.



17 في الشكلِ المجاورِ، $\overrightarrow{ZX}$ وَ $\overrightarrow{ZY}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O. أَجِدُ قيمةَ a. 40

إجابات الأسئلة:

9) نعم، متطابقان؛ لأنَّ أضلاعهما المتناظرة متطابقة.
(لأنَّ M منتصف EF) $EM = MF$
(لأنَّهما نصفا قُطْرين في الدائرة) $OE = OF$
(ضلع مشترك) $OM = OM$

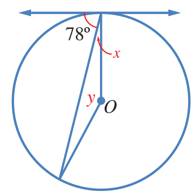
10) الزاوية EMO قائمة؛ لأنَّ $m\angle EMO = m\angle FMO$ ، ومجموعهما $180°$؛ لأنَّ EMF خط مستقيم، فقياس كلٍّ منهما يساوي $90°$

11) $18°$ ؛ لأنَّ: $m\angle MFO = 90° - 72° = 18°$
$m\angle MEO = m\angle MFO$

12) نعم؛ لأنَّ المماس يعامد نصف القُطْر المار بنقطة التماس.

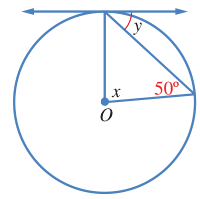
يَظهرُ في كلٍّ منَ الشكليْنِ الآتييْنِ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O. أَجِدُ قيمةَ x وَ y في كلِّ حالةٍ.

18



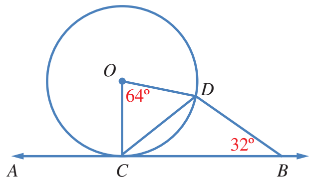
$x = 12°\ ,\ y = 156°$

19



$x = 80°\ ,\ y = 40°$

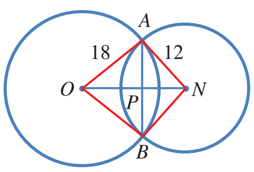
20 في الشـــكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ لدائـــرةٍ مركزُها O في النقطةِ C.
لماذا يُعَدُّ المثلثُ BCD مُتطابِقَ الضلعيْنِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.
أنظر الهامش.



21 كمْ مماسًّا يُمكِنُ أنْ يُرسَمَ للدائرةِ منْ نقطةٍ عليْها، ومنْ نقطةٍ خارجَها، ومنْ نقطةٍ داخلَها؟ أُبرِّرُ إجابتي.
يمكن رســـم مماس واحد فقط للدائرة من نقطة عليها، ويمكن رسم مماسين للدائرة من نقطة خارجها، ولا يمكن رسم أيِّ مماس للدائرة من نقطة داخلها؛ لأنَّ أيَّ مستقيم مرسوم من نقطة داخل الدائرة يقطعها في نقطتين.

مهارات التفكير العليا

22 **تحدٍّ**: $\overline{AB}$ وترٌ مشـــتركٌ بينَ دائرتيْنِ متقاطعتيْنِ، وهوَ عموديٌّ على القطعةِ المســـتقيمةِ $\overline{ON}$ الواصلةِ بينَ مركزيْهِما. إذا كانَ $AB = 14\text{ cm}$، فما طولُ $\overline{ON}$؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.



23 **برهانٌ**: $\overline{AB}$، وَ $\overline{CD}$ وترانِ متساويانِ في دائرةٍ مركزُها N. أُثبِتُ أنَّ لهُما البُعْدَ نفسَهُ عنِ النقطةِ N.
أنظر ملحق الإجابات.

24 **تبريرٌ**: $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها N في النقطةِ A، وطولُ نصفِ قُطْرِها 3 cm، وَ $BA = 5\text{ cm}$. قالَتْ سارةُ إنَّ $BN = 4\text{ cm}$؛ لأنَّ $(BN)^2 = (BA)^2 - (AN)^2 = 16$. هلْ قولُ سارةَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.
أنظر ملحق الإجابات.

إجابات الأسئلة:

20) المثلث ODC متطابق الضلعين؛ لأنَّ:

نصفا قُطْرين في الدائرة $\quad OD = OC$

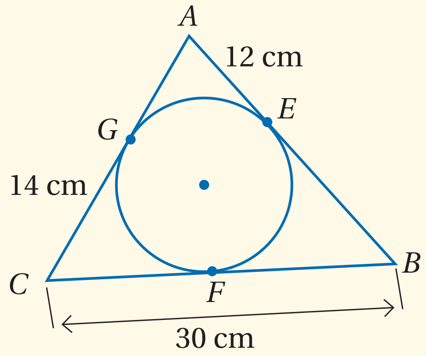
$m\angle CDO = m\angle DCO = (180° - 64°) \div 2 = 58°$

$m\angle DCB = 90° - 58° = 32°,\ m\angle DCB = m\angle DBC = 32°$

إذن: المثلث BCD متطابق الضلعين؛ لأنَّ فيه زاويتين متطابقتين.

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:
  » أجد المتوسط حساب محيط المثلث ABC الآتي الذي تمس أضلاعه الدائـــرة في النقاط: E، و F، و G. 84 cm

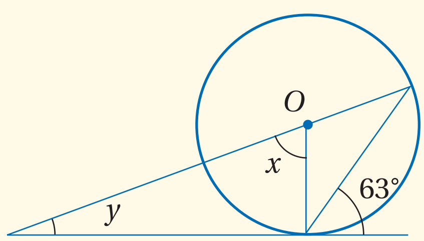


تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة بدء البحث عن أحد النماذج العلمية أو الحياتية التي تستعمل خاصية أو أكثر من خصائص الدائرة، وتحديد هذه الخاصية.

6 الختام

- أطلب إلى الطلبة تلخيص ما تعلَّموه عن المماســـات والأقطار في هذا الدرس، واســـتعماله لإيجاد قيمة x و y في الشكل الآتي. $x = 54°;\ y = 36°$



الدرس 2

نتاجات الدرس

- حساب طول قوس من دائرة.
- حساب مساحة القطاع الدائري.
- حل مسائل عن طول القوس، ومساحة القطاع الدائري.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- حساب محيط الدائرة.
- حساب مساحة الدائرة.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أرسم على اللوح دائرتين، نصف قُطْر كلٍّ منهما 5 cm، و 10 cm
- أطلب إلى الطلبة حساب محيطيهما، ومساحتيهما.
- أُناقِش الطلبة في العلاقة بين نصفي القُطْرين والمحيطين والمساحتين؛ لاستنتاج أنَّه إذا تضاعف نصف القُطْر مرَّتين، فإنَّ المحيط سيتضاعف مرَّتين، في حين تتضاعف المساحة 4 مرّات.

الدرس 2

الأقواسُ والقطاعاتُ الدائريةُ
Arcs and Sectors

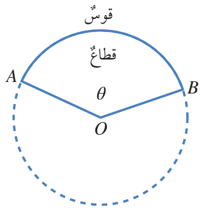
فكرةُ الدرسِ حسابُ طولِ القوسِ، ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ، وحَلُّ مسائلَ تتعلَّقُ بهِما.

المصطلحاتُ القوسُ، القطاعُ.

مسألةُ اليومِ أَعَدَّ سعيدٌ فطيرةَ بيتزا في وعاءٍ دائريٍّ طولُ قُطْرِهِ 24 cm. وبعدَ أنْ خبزَها أحدثَ فيها شَقَّيْنِ منَ المركزِ إلى الطرفِ، بحيثُ كانَ قياسُ الزاويةِ بينَهُما 45°. كيفَ يُمكِنُ إيجادُ مساحةِ الجزءِ الذي قطعَهُ سعيدٌ منَ الفطيرةِ؟

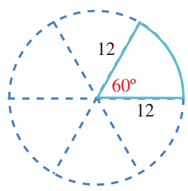
القوسُ (arc) هوَ جزءٌ منْ الدائرةِ مُحدَّدٌ بنقطتيْنِ عليْها. و**القطاعُ** (sector) هوَ الجزءُ المحصورُ بينَ قوسٍ منْها ونصفَي القُطْريْنِ اللذيْنِ يمرّانِ بطرفَي القوسِ.

تُمثِّلُ الزاويةُ AOB في الشكلِ المجاورِ زاويةَ القطاعِ الذي يُعَدُّ كسرًا منَ الدائرةِ. ويُمكِنُ استعمالُ قياسِ زاويةِ القطاعِ لكتابةِ هذا الكسرِ، وذلكَ بقسمةِ قياسِ الزاويةِ على الدورةِ الكاملةِ؛ أيْ: $\frac{\theta}{360^\circ}$، حيثُ θ قياسُ زاويةِ القطاعِ.

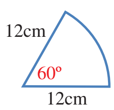


مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا. أَجِدُ:



1 طولَ القوسِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π).



القطاعُ كسرٌ منَ الدائرةِ، وهذا الكسرُ هوَ $\frac{1}{6} = \frac{60^\circ}{360^\circ}$. وبما أنَّ طولَ قُطْرِ الدائرةِ 24 cm، فإنَّ طولَ محيطِها: $24 \times \pi = 24\pi$ cm

إذنْ، طولُ القوسِ يساوي $\frac{1}{6}$ طولِ محيطِ الدائرةِ؛ أيْ:

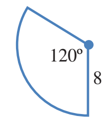
$24\pi \div 6 = 4\pi$ cm

2 مساحةُ القطاعِ.

مساحةُ الدائرةِ هيَ: $\pi \times 12^2 = 144\pi\ \text{cm}^2$

مساحةُ القطاعِ تساوي $\frac{1}{6}$ مساحةِ الدائرةِ؛ أيْ: $144\pi \div 6 = 24\pi\ \text{cm}^2$

أتحقق من فهمي



يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًا. أَجِدُ طولَ القوسِ، ومساحةَ القطاعِ الدائريِّ. $\ell \approx 16.8$ $A \approx 67.0$

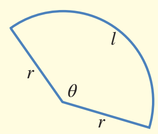
تعرَّفْنا في المثالِ السابقِ أنَّ القطاعَ هوَ كسرٌ منَ الدائرةِ، وأنَّهُ يُمكِنُ دائمًا استعمالُ قياسِ زاويةِ القطاعِ لحسابِ طولِ القوسِ ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ.

مفهومٌ أساسيٌّ طولُ القوسِ القطاعِ الدائريِّ ومساحتِه

إذا كانَ قياسُ زاويةِ القطاعِ $\theta°$، وطولُ نصفِ قُطرِ الدائرةِ r، وطولُ القوسِ l، ومساحةُ القطاعِ A، فإنَّ:

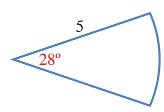
$$l = \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$$

$$A = \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$$



مثال 2

أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في الشكلِ المجاورِ.



زاويةُ القطاعِ هيَ 28°، وطولُ نصفِ القُطرِ هوَ 5 وحداتِ طولٍ:

$l = \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$ قانونُ طولِ القوسِ

$l = \frac{28°}{360°} \times \pi \times 2 \times 5$ بتعويضِ $\theta = 28°, r = 5$

≈ 2.4 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، طولُ هذا القوسِ مُقرَّبًا إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هوَ: 2.4 وحدةِ طولٍ.

$A = \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$ قانونُ مساحةِ القطاعِ

$= \frac{28°}{360°} \times \pi \times 5^2$ بتعويضِ $r = 5, \theta = 28°$

≈ 6.1 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

46

أخطاء شائعة:

قد يُخطِئ بعض الطلبة في حل المثال الإضافي، فيُعوِّضون الزاوية 45° لإيجاد طول القوس، أو مساحة القطاع؛ لذا أُؤكِّد عليهم أنَّ قياس الزاوية يساوي 315°

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » ما قياس زاوية الدورة الكاملة؟ 360°
  - » ما الكسر الذي تُمثِّله الزاوية 45° من الدورة الكاملة؟ $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$
  - » ما مساحة الفطيرة كاملة؟ $144\pi \approx 452.4\text{cm}^2$
  - » ماذا يُمثِّل الجزء الذي قطعته عفاف من الفطيرة؟ $\frac{1}{8}$ الفطيرة.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

3 التدريس

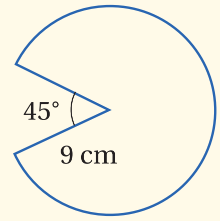
- أطلب إلى الطلبة كتابة محيط دائرة بدلالة نصف قُطْرها r، ثم كتابة طول الجزء المنحني من نصف تلك الدائرة وربعها.
- أُعرِّف القوس، والقطاع الدائري، ثم آخذ قوسًا يقابل زاوية قياسها 40° عند مركز الدائرة، ثم أسأل الطلبة:
  - » ما الكسر الذي يُمثِّله هذا القوس من محيط الدائرة؟ $\frac{1}{9}$
  - » ما طول هذا القوس؟ 8.37 cm
- أسأل الطلبة عن مساحة القطاع الذي زاويته 40°. 50.24cm^2
- أُوضِّح للطلبة أنَّه إذا كان القوس AB يقابل الزاوية θ عند مركز دائرة نصف قُطْرها r، فإنَّ طول القوس AB يساوي $\frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$، وإنَّ مساحة هذا القطاع الدائري هي: $\frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$
- أُؤكِّد للطلبة أنَّ قياس زاوية القطاع هو الذي يُحدِّد الكسر الذي يُمثِّله القوس من محيط الدائرة، وتُمثِّله مساحة القطاع من مساحة الدائرة، وأنَّ القانون أقل أهمية.

المثالان 1 و 2

- أُشــارِك الطلبة في حل المثاليــن 1 و2 اللذين يُبيِّنان كيفية حســاب طول القوس ومساحة القطاع الدائري إذا عُلِمت زاويته.

مثال إضافي:

أجد طول القوس ومساحة القطاع الدائري المجاور، مُقرِّبًا إجابتي إلى منزلة عشرية واحدة.



$\ell \approx 49.5 \text{ cm}\ ;\ A \approx 222.7 \text{ cm}^2$

التقويم التكويني:

- أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند **(أتحقَّق مــن فهمي)** بعد كل مثال، ثــم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشــتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

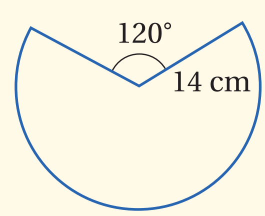
إرشــاد: أُنبِّه الطلبة أنَّه عنــد تعويض قيمة π فإنَّهم يحصلون علــى إجابة تقريبية، وتكون الإجابة التي تحوي π هي الإجابة الدقيقة.

مثال 3

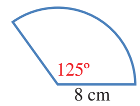
- أُعرِّف للطلبة مفهوم محيط القطاع الدائري، مُبيِّنًا لهم كيفية حسابه.
- أُشارِك الطلبة في حل المثال 3 الذي يُبيِّن كيفية حساب محيط قطاع دائري.

مثال إضافي:

أجــد محيط القطاع الدائري الآتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى منزلة عشرية واحدة. 86.6 cm



إذنْ، مساحةُ هذا القطاعِ مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هيَ: 6.1 وحدةٍ مربعةٍ.



أتحقق من فهمي

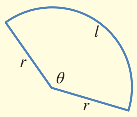
أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في الشكلِ المجاورِ. $\ell = 17.5 \text{ cm}$ ، $A \approx 69.8 \text{ cm}^2$

محيطُ القطاعِ الدائريِّ

مفهومٌ أساسيٌّ

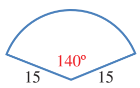
محيطُ القطاعِ الدائريِّ (L) هوَ المســافةُ حولَ القطاعِ، وهيَ تساوي طولَ قوسِ القطاعِ، مضافًا إليْهِ مِثْلا طولِ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r + 2r$$



مثال 3

أَجِدُ محيطَ القطاعِ الدائريِّ في الشــكلِ المجاورِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.



زاويةُ القطاعِ هيَ 140°، وطولُ نصفِ القُطْرِ هوَ 15 وحدةَ طولٍ:

$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r + 2r$ قانونُ محيطِ القطاعِ

$= (\frac{140^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \pi \times 15) + 2 \times 15$ بتعويضِ $r = 15, \theta = 140^\circ$

≈ 66.6519 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، محيطُ هذا القطاعِ مُقرَّبًا إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هوَ: 66.7 وحدةِ طولٍ.

رموزٌ رياضيةٌ

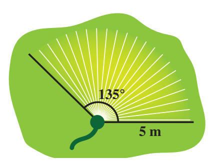
يرمــزُ الحــرفُ l إلى طولِ القوسِ، ويرمــزُ الحرفُ L إلى محيطِ القطاعِ.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ محيطَ قطــاعٍ دائريٍّ زاويتُهُ 225°، في دائرةٍ طولُ نصفِ قُطْرِها 50 cm، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ. 296.3 cm

مثال 4: من الحياة

حديقــةُ منــزلٍ وُضِــعَ فــي أحــدِ أطرافِهــا مِــرَشٌّ للمــاءِ، يــدورُ حــولَ الــرأسِ بزاويــةٍ مقدارُهــا 135°، فيصــلُ المــاءُ إلــى مســافةِ 5 m مــنَ المِــرَشِّ. أَجِــدُ مســاحةَ المنطقــةِ التــي ســيرويها هــذا المِــرَشُّ، مُقرِّبًــا إجابتــي إلــى أقــربِ منزلــةٍ عشــريةٍ واحــدةٍ.



المفاهيم العابرة:

أُؤكِّــد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة للمواد حيثمــا وردت في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين. ففي المثال 4 من الحياة، أُعزِّز الوعي **بالقضايا البيئية (ترشيد استهلاك المياه)** عن طريق حوار أُديره مع الطلبة عن أهمية ترشيد استهلاك الماء في حفظ التوازن البيئي والمحافظة على الموارد المائية.

أخطاء شائعة:

قد يغفل بعــض الطلبة عن إضافة مثلي طول نصف قُطْر الدائرة عند حســاب محيط القطاع الدائري، وذلك بكتابة طول القوس فقط إجابة للمحيط؛ لذا أُنبِّههم إلى ذلك، وأذكر أمثلة على حساب محيط نصف دائرة، وربع دائرة، وأشكال مُركَّبة تحوي أقواسًا من دوائر.

مثال 4: من الحياة

- أُشـارِك الطلبة في حل المثال 4 الذي يعرض لمسألة حياتية يراد حساب مساحة قطاع دائري فيها.

مثال إضافي:

- في محل لبيع البيتزا، يوجد نوعان من شـطائر البيتزا، أحدهمـا قُطْره 35 cm، وهو يقسـم إلـى قطاعات زاويتها 60°، والآخر قُطْره 40 cm، وهو يقسـم إلى قطاعات زاويتها 45°. ما الفرق بين مساحة قطعة بيتزا من النوع الأوَّل وأخرى من النوع الثاني؟ $3.3\ cm^2$

4 التدريب

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبـة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسـائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسـائل (8-1) ضمن مجموعات ثنائية داخـل الغرفة الصفية؛ فهذه المسـائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشـرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسـها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحـد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسـألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ اسـتراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تسـاؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّـه الطلبة إلى بنـد (**مهارات التفكيـر العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (20 – 18).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

تُمثِّلُ المنطقةُ التي سيرويها المِرَشُّ قطاعًا دائريًّا زاويتُهُ 135°، وطولُ نصفِ قُطْرِهِ 5 m:

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$ قانونُ مساحةِ القطاعِ

$$= \frac{135^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 5^2$$ بتعويضِ $r = 5, \theta = 135^\circ$

$$\approx 29.5$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

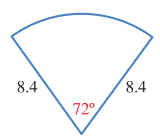
إذنْ، مساحةُ هذهِ المنطقةِ مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هيَ: $29.5\ m^2$

أتحقق من فهمي

طولُ عقربِ الدقائقِ في سـاعةِ حائطٍ هوَ 15 cm. ما مِساحةُ المنطقةِ التي يُغطّيها العقربُ في أثناءِ حركتِهِ منَ العددِ 9 إلى العددِ 2؟ $294.5\ cm^2$

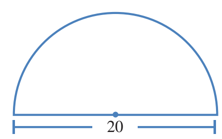
أتدرب وأحل المسائل

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا:

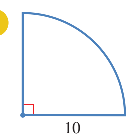


1. أُعبِّرُ بكسرٍ عنِ الجزءِ الذي يُمثِّلُهُ هذا القطاعُ منَ الدائرةِ. $\frac{1}{5}$
2. أَجِدُ طولَ القوسِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ. 10.6
3. أَجِدُ مساحةَ القطاعِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ. 44.3

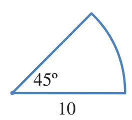
أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في كلٍّ منَ الأشكالِ الآتيةِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π):

4.


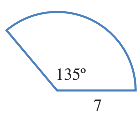
$\ell = 10\pi$
$A = 50\pi$

5.


$\ell = 5\pi$
$A = 25\pi$

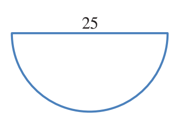
6.


$\ell = 2.5\pi$
$A = 12.5\pi$

7.


$\ell = 5.25\pi$
$A = 18.375\pi$

8. أَجِدُ مساحةَ نصفِ الدائرةِ المجاورةِ، ثمَّ أَجِدُ محيطَها. 245.4; 64.3



تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المسـتوى دون المتوسـط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسـائل**)، فإنَّني أضع كُلًّا منهم مـع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

الواجب المنزلي:

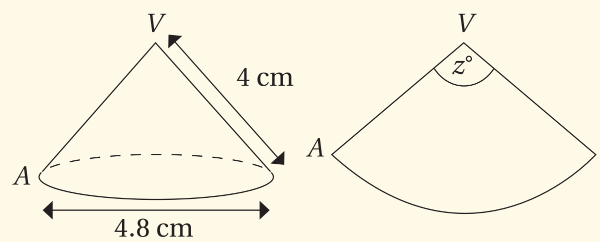
أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (9 – 13) كتاب التمارين: (1 – 6)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (14 – 17) كتاب التمارين: (5 – 7)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (17 – 20) كتاب التمارين: (7 – 9)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:

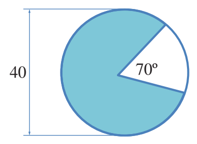
» يُبيِّن الشكل الآتي مخروطًا من الورق المقوى، قُطْر قاعدته 4.8 cm، وطول راسمه 4 cm، إذا قُصَّ على طول المستقيم AV، وبُسِطَ ليُكوِّن القطاع الدائري المُبيَّن في الشكل، فما قياس الزاوية z؟ $216°$



تعليمات المشروع:

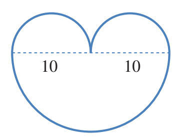
- أطلب إلى الطلبة متابعة البحث عن أحد النماذج العلمية أو الحياتية التي تستعمل خاصية أو أكثر من خصائص الدائرة، وتحديد هذه الخاصية، وكذلك التقاط صور توضيحية للنموذج، وبدء كتابة تقرير باستعمال مستند معالج النصوص (وورد) يتضمَّن وصفًا للنموذج مع الصور.
- أُذكِّر الطلبة بضرورة توثيق مصادر معلوماتهم والصور.

9 أجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ في الشكلِ المجاورِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). أُبرِّرُ إجابتي. $322.2\ \pi$



10 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. بقسمة مساحة الفطيرة على 8
$56.5\ cm^2$

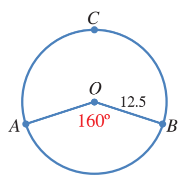
يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ 3 أنصافِ دوائرَ:



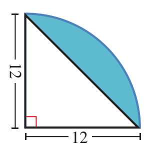
11 أجِدُ محيطَ الشكلِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). 20π

12 أجِدُ مساحةَ الشكلِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). 75π

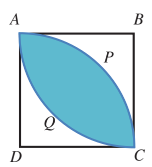
13 تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ دائرةٍ، طولُ نصفِ قُطرِها 12.5 وحدةِ طولٍ. أجِدُ طولَ القوسِ ACB. 43.6



14 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ ربعَ دائرةٍ. أجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ في الشكلِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). $36\pi - 72$

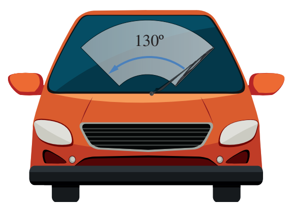


15 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المربَّعَ $ABCD$ الذي طولُ ضلعِهِ 8 cm، ويُمثِّلُ APC وَ AQC قوسينِ منْ دائرتيْنِ مركزاهُما D وَ B على التوالي. أجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). $32\pi - 64$



16 صمَّمَ مهندسٌ مِرَشَّ مياهٍ لريِّ منطقةٍ مساحتُها $100\ m^2$ على هيئةِ قطاعٍ دائريٍّ طولُ نصفِ قُطرِهِ 15 m. ما زاويةُ دورانِ هذا المِرَشِّ؟ $51°$

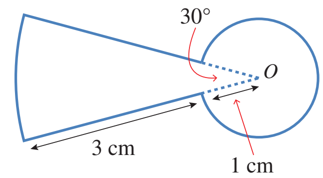
17 **سياراتٌ:** يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ ماسحةَ الزجاجِ الأماميِّ لسيارةٍ. إذا كانَ طولُ شفرةِ الماسحةِ 40 cm، وطولُ شفرةِ الماسحةِ معَ ذراعِها 66 cm، فما مساحةُ الزجاجِ التي تُنظِّفُها الماسحةُ، مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ؟ أنظر الهامش.



مهارات التفكير العليا

18 **تحدٍّ:** أجدُ محيطَ الشكلِ المجاورِ ومساحتَهُ.

أنظر ملحق الإجابات.

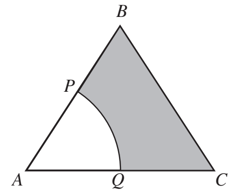


19 **تحدٍّ:** اشترَتْ عفافُ فطيرةَ بيتزا دائريةَ الشكلِ طولُ قُطْرِها 36 cm، ثمَّ قسّمَتْها إلى قطعٍ متساويةٍ. بعدَ ذلكَ أكلَتْ منْها قطعتيْنِ تُمثِّلانِ معًا $180\ cm^2$ منْها. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ لقطعةِ البيتزا الواحدةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عددٍ كليٍّ.

32°

20 **تحدٍّ:** يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ مثلثًا مُتطابِقَ الأضلاعِ، طولُ ضلعِهِ 6 cm. إذا كانَتِ النقطتانِ P وَ Q تُنصِّفانِ الضلعيْنِ $\overline{AB}$ وَ $\overline{AC}$ على التوالي، وكانَ APQ قطاعًا دائريًّا منْ دائرةٍ مركزُها A، فأَجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ.

أنظر ملحق الإجابات.



إجابات الأسئلة:

17) $A = \frac{130}{360} \times 66^2 \times \pi - \frac{130}{360} \times 26^2 \times \pi \approx 4175\ cm^2$

6 الختام

- أرسم قطاعين دائريين، زاوية الأوَّل 40°، وطول نصف قُطْره 4 cm، وزاوية الثاني 20°، وطول نصف قُطْره 8 cm،
- ثم أسأل الطلبة:
  - » أيُّ القطاعين قوسه أطول؟
  - » أيُّهما محيطه أطول؟
  - » أيُّهما مساحته أكبر؟
- أمنح الطلبة دقيقتين أو ثلاث دقائق للتفكير ضمن مجموعات ثنائية، ثم تقديم ملاحظاتهم. (طولا القوسين متساويان، محيط الثاني أطول، مساحة القطاع الثاني تساوي مثلي مساحة القطاع الأوَّل).
- أطلب إلى الطلبة ذكر أمثلة على قطاعات دائرية تشبه القطاعين السابقين، ولها طول القوس نفسه.

من الإجابات المحتملة:

180° و 2 cm؛ 60° و 6 cm؛ 120° و 3 cm؛ 22.5° و 16 cm

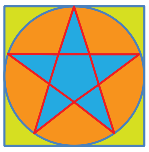
الدرس 3

الزوايا في الدائرة
Angles in a Circle

فكرةُ الدرسِ معرفةُ العلاقاتِ بينَ الزوايا في الدائرةِ، وتوظيفُها في إيجادِ زوايا مجهولةٍ وحَلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

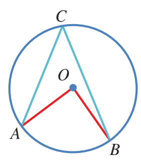
المصطلحاتُ الزاويةُ المركزيةُ، الزاويةُ المحيطيةُ، القوسُ المقابلُ، الزاويةُ المُقابِلةُ لقُطْرِ الدائرةِ، الرباعيُّ الدائريُّ، الزاويةُ المماسيةُ.

مسألةُ اليومِ يُمثِّلُ الشـكلُ المجاورُ تصميمًا مُكوَّنًا منْ نجمةٍ خماسـيةٍ منتظمةٍ محاطةٍ بدائرةٍ يحيطُ بها مربَّعٌ. ماذا تُسـمّى الزوايا عندِ رؤوسِ النجمةِ؟ كيفَ نجدُ قياسَ كلٍّ منْها؟



تُسمّى الزاويةُ التي يكونُ رأسُها في مركزِ الدائرةِ، وضلعاها نصفَيْ قُطْرَيْنِ للدائرةِ **زاويةً مركزيةً** (central angle). ففـي الشـكلِ الآتي، AOB زاويـةٌ مركزيةٌ في الدائـرةِ التي مركزُها O، ويُسمّى القوسُ $\overset{\frown}{AB}$ **القوسَ المقابلَ** (subtended arc).

يُسمّى $\overset{\frown}{AB}$ القوسَ الأصغرَ، ويُسـمّى $\overset{\frown}{ACB}$ القـوسَ الأكبرَ.

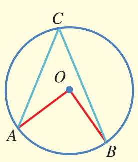


تُسـمّى الزاويةُ التي يقعُ رأسُـها على الدائرةِ، ويكونُ ضلعاها وترَيْنِ في الدائرةِ **زاويةً محيطيةً** (inscribed angle). ففي الشكلِ السـابقِ، الزاويةُ ACB محيطيةٌ، والزاويةُ AOB مركزيةٌ، وهما مرسـومتانِ على القـوسِ $\overset{\frown}{AB}$. وعندَ قياسِ هاتيْـنِ الزاويتيْنِ سـنجدُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المركزيةِ AOB يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ ACB.

نظريةٌ **الزاويةُ المركزيةُ والزاويةُ المحيطيةُ**

قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ:

$$m\angle AOB = 2m\angle ACB$$



أُفكِّرُ ما قيـاسُ الزاويةِ المحيطيَّةِ المقابلةِ للقطرِ؟

الدرس 3

نتاجات الدرس

- تعرُّف العلاقة بين قياسـي الزاوية المحيطية والزاوية المركزية المرسومتين على القوس نفسه في الدائرة.
- تعرُّف العلاقة بين قياسات الزوايا المحيطية المشتركة في القوس نفسه.
- تعـرُّف العلاقة بين قياسـات زوايا الشـكل الرباعي الدائري.
- تعرُّف العلاقة بين قياسـي الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس.
- توظيف العلاقات بين قياسـات الزوايا في الدائرة في حل مسائل رياضية وحياتية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

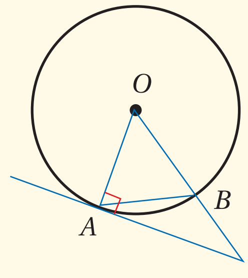
- تعرُّف الدائرة ومكوناتها.
- اسـتعمال مجموع قياسـات كلٍّ من زوايـا المثلث، وزوايا الشكل الرباعي، والزوايا حول نقطة في إيجاد قياسات زوايا مجهولة.
- اسـتعمال العلاقات بيـن الزوايا الناتجـة من تقاطع مسـتقيم مع مسـتقيمين متوازيين في إيجاد قياسات زوايا مجهولة.
- استعمال خصائص كلٍّ من المثلث المتطابق الضلعين، والمثلث المتطابـق الأضلاع، ومتوازي الأضلاع في إيجاد قياسات مجهولة.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطـة بما سـيُقدَّم من موضوعـات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أسـتعد لدراسة الوحدة) في كتـاب التمارين، ثم أطلـب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلـى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أرسم على اللوح الشكل المجاور، ثم أسأل الطلبة:



» ماذا تُسمّى $\overline{OB}$؟
تُسمّى نصف قُطْر.

» ماذا تُسمّى $\overline{AB}$؟ تُسمّى وترًا.

» ماذا يُسمّى $\overrightarrow{TA}$؟ يُسمّى مماسًّا.

» ما نوع المثلث OAB؟ لماذا؟
متطابق الضلعين؛ لأنَّ $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ نصفا قُطْرين متطابقان.

» إذا كان قياس الزاوية ABO هو $65°$، فما قياس الزاوية AOB؟ لماذا؟ $50°$؛ لأنَّ زاويتي القاعدة متطابقتان، ومجموع زوايا المثلث هو $180°$

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:

» ما المضلع المنتظم؟ مضلع لجميع أضلاعه الطول نفسه، ولجميع زواياه القياس نفسه.

» ماذا يُسمّى الشكل الظاهر في وسط النجمة؟ يُسمّى مضلعًا خماسيًّا منتظمًا.

» ما قياس كل زاوية من الزوايا الداخلية في هذا المضلع الخماسي المنتظم؟ $108°$

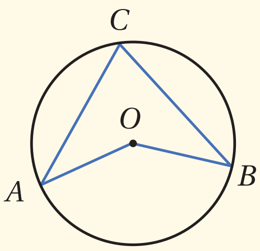
» ما قياس زوايا أحد المثلثات الصغيرة الخمسة الظاهرة في الشكل؟ $72°, 72°, 36°$

- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

إرشاد: أُذكِّر كل طالب بضرورة إحضار منقلة ومسطرة وفرجار لرسم الأشكال وقياس الزوايا والأطوال.

3 التدريس

- أطلب إلى كل طالب رسم الشكل المجاور في دفتره، علمًا بأنَّ O هو مركز الدائرة.



- أُعرِّف للطلبة الزاوية المركزية، والزاوية المحيطية، والقوس المقابل لهما.
- أطلب إلى الطلبة تلوين الزاوية C بلون غامق، والزاوية AOB بلون فاتح، ثم قَصَّ الزاويتين.
- أطلب إلى الطلبة ثني الزاوية O من المنتصف بحيث ينطبق الضلعان OA و OB، ثم وضع الزاوية C فوقها، ثم تدوين ملاحظاتهم.
- أسأل أحد الطلبة:

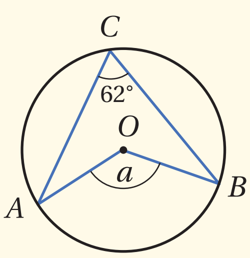
» ما العلاقة بين قياس الزاوية ACB وقياس الزاوية AOB؟ قياس الزاوية AOB يساوي مثلي قياس الزاوية ACB.

» مَنْ يوافقه الرأي؟

» مَنْ لديه إجابة أخرى؟

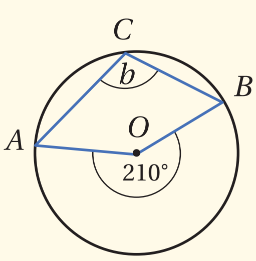
» ما هذه الإجابة؟

- أُوضِّح للطلبة أنَّ هذا صحيح دائمًا، ثم أكتب نص النظرية على اللوح، أو أعرضها أمامهم على لوحة من الكرتون.



- أذكر أمثلة عددية بسيطة ومباشرة، مثل السؤالين الآتيين:

» ما قيمة كلٍّ من a، و b في الشكلين المجاورين؟

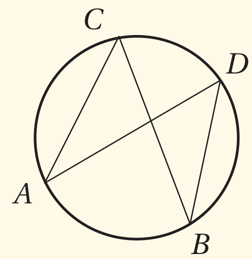


- أستمع لإجابات الطلبة، ثم أُقدِّم لهم التغذية الراجعة والدعم اللازم في حينه.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

- أطلب إلى الطلبة رسم الشكل التالي في دفاترهم، ثم قياس جميع الزوايا المحيطية المُبيَّنة في الشكل، ثم تدوين ملاحظاتهم عليها. سيلاحظ الطلبة أنَّ الزوايا المحيطية المقابلة للقوس نفسه متطابقة.



- أُبيِّن للطلبة أنَّ هذا صحيح دائمًا، وأنَّه يُمثِّل موضوع نظرية ثانية من نظريات الدائرة (الزوايا المحيطية المرسومة على القوس نفسه).

إرشاد: أُوجِّه الطلبة إلى تلوين الزوايا المحيطية المرسومة على القوس نفسه بألوان مختلفة، ثم قصها، ووضع بعضها فوق بعض؛ لمقارنة قياساتها، ثم تدوين ملاحظاتهم، وذلك لاستكشاف نظرية الزوايا المحيطية المرسومة على القوس نفسه.

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد زوايا في الدائرة اعتمادًا على نظريات الزوايا المحيطية، والزوايا المركزية، والعلاقات السابقة.

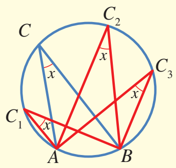
التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

نظريةٌ **الزوايا المحيطيةُ المرسومةُ على قوسٍ واحدٍ**

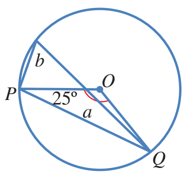
جميعُ الزوايا المحيطيةِ المرسومةِ على قوسٍ واحدٍ في دائرةٍ لها القياسُ نفسُهُ:

$$m\angle ACB = m\angle AC_1B = m\angle AC_2B = m\angle AC_3B$$



مثال 1

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قياسُ الزاويتيْنِ المشارِ إليْهِما بالحرفيْنِ a وَ b؟



المثلثُ OPQ مُتطابِقُ الضلعيْنِ؛ لأنَّ $\overline{OQ}$ وَ $\overline{OP}$ نصفا قُطْريْنِ في الدائرةِ ومجموعُ قياساتِ زوايا المثلثِ هوَ $180°$. إذنْ:

$m\angle POQ + m\angle OQP + m\angle OPQ = 180°$ نُعوِّضُ قياساتِ الزوايا المعلومةِ:

$a + 25° + 25° = 180°$ في المثلثِ مُتطابِقِ الضلعيْنِ تتطابقُ زاويتا القاعدةِ

$a + 50° = 180°$ بالتبسيطِ

$a + 50° - 50° = 180° - 50°$ بطرحِ $50°$ منَ الطرفيْنِ

$a = 130°$

$b = 130° \div 2$ قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المشتركةِ معَها في القوسِ نفسِهِ

$= 65°$ بالتبسيطِ

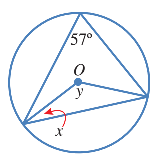
أَتذكَّرُ

زاويتا قاعدةِ المثلثِ مُتطابِقِ الضلعيْنِ متساويتانِ في القياسِ.

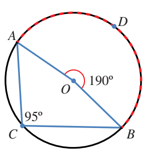
أتحقق من فهمي

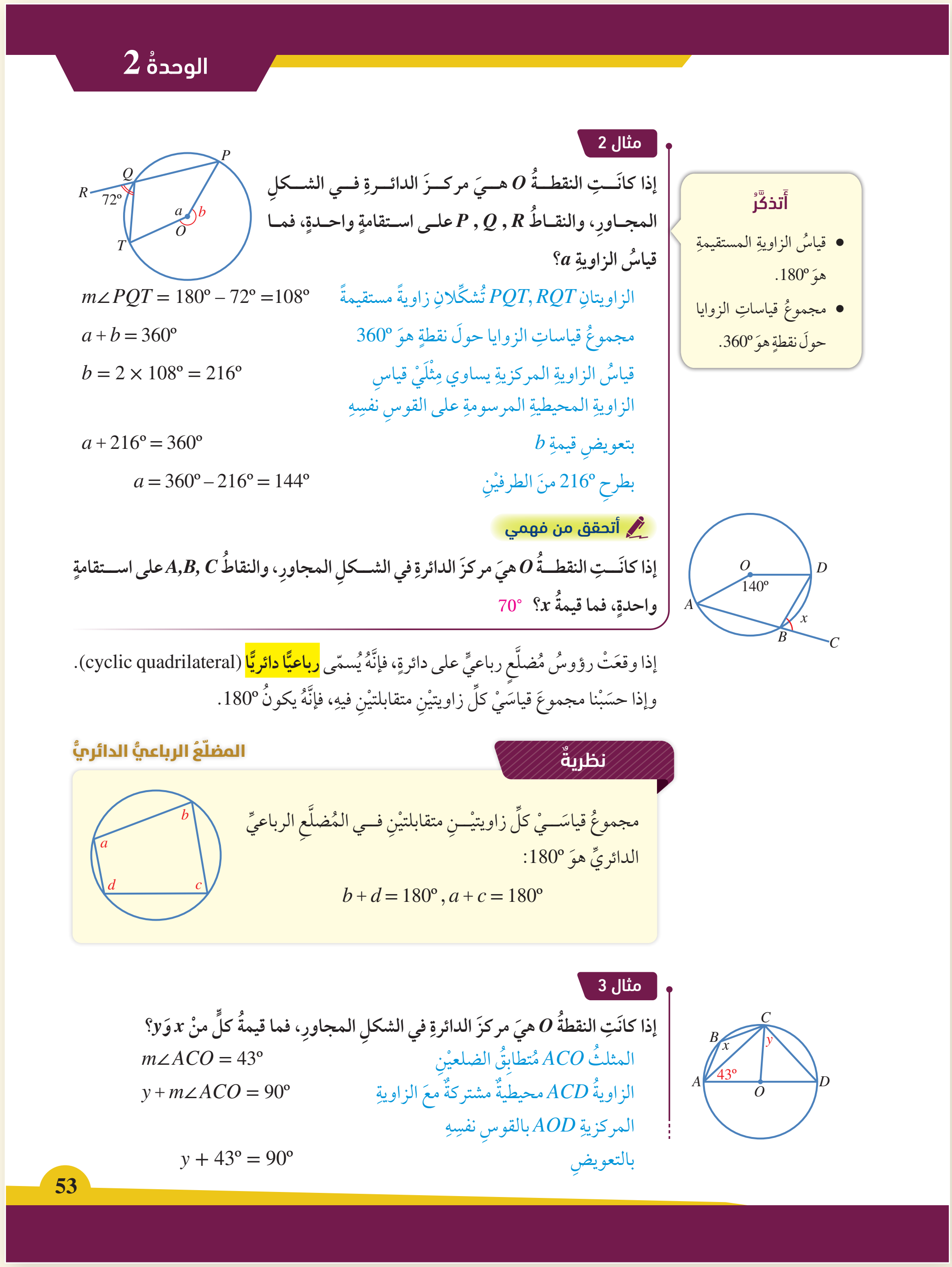
إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟

$x = 33°\ ;\ y = 114°$



قدْ يكونُ قياسُ الزاويةِ المركزيةِ أكبرَ منْ $180°$. ففي الشكلِ المجاورِ، الزاويةُ AOB مُقابِلةٌ للقوسِ $\widehat{ADB}$، وقياسُها $190°$، وهوَ ضعفُ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ ACB.





مثال 2

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، والنقاطُ P , Q , R على استقامةٍ واحدةٍ، فما قياسُ الزاويةِ a؟

الزاويتانِ PQT, RQT تُشكِّلانِ زاويةً مستقيمةً	$m\angle PQT = 180° - 72° = 108°$
مجموعُ قياساتِ الزوايا حولَ نقطةٍ هوَ $360°$	$a + b = 360°$
قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ	$b = 2 \times 108° = 216°$
بتعويضِ قيمةِ b	$a + 216° = 360°$
بطرحِ $216°$ منَ الطرفيْنِ	$a = 360° - 216° = 144°$

أتذكَّرُ

- قياسُ الزاويةِ المستقيمةِ هوَ $180°$.
- مجموعُ قياساتِ الزوايا حولَ نقطةٍ هوَ $360°$.

أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، والنقاطُ A, B, C على استقامةٍ واحدةٍ، فما قيمةُ x؟ $70°$

إذا وقعَتْ رؤوسُ مُضلَّعٍ رباعيٍّ على دائرةٍ، فإنَّهُ يُسمّى **رباعيًّا دائريًّا** (cyclic quadrilateral). وإذا حسَبْنا مجموعَ قياسَيْ كلِّ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ فيهِ، فإنَّهُ يكونُ $180°$.

نظريةٌ — المضلَّعُ الرباعيُّ الدائريُّ

مجموعُ قياسَيْ كلِّ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ في المُضلَّعِ الرباعيِّ الدائريِّ هوَ $180°$:

$b + d = 180°, a + c = 180°$

مثال 3

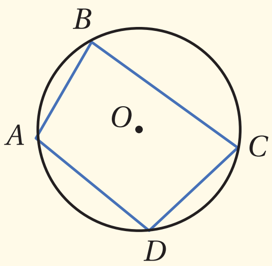
إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟

المثلثُ ACO مُتطابِقُ الضلعيْنِ	$m\angle ACO = 43°$
الزاويةُ ACD محيطيةٌ مشتركةٌ معَ الزاويةِ المركزيةِ AOD بالقوسِ نفسِهِ	$y + m\angle ACO = 90°$
بالتعويضِ	$y + 43° = 90°$

مثال 2

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 الذي يُبيِّن العلاقة بين الزاوية المحيطية المشتركة في القوس مع زاوية مركزية منعكسة (أكبر من $180°$).

مثال 3



- أطلب إلى الطلبة رسم الشكل المجاور في دفاترهم، علمًا بأنَّ O هو مركز الدائرة. أُبيِّن لهم أنَّ الشكل الرباعي الذي تقع رؤوسه على الدائرة يُسمّى مضلعًا رباعيًّا دائريًّا، وأنَّ الزاويتين A، و C تُسمَّيان زاويتين متقابلتين فيه. وكذلك الزاويتان B، و C؛ فهما متقابلتان.
- أطلب إلى الطلبة تلوين رؤوس الشكل الرباعي الأربعة بألوان مختلفة، ثم قص الزاويتين A، و C، ثم وضع الرأسين أحدهما بجانب الآخر، ثم تدوين ملاحظاتهم.
- أطلب إلى الطلبة تكرار الخطوة السابقة للرأسين B، و D، ثم تدوين ملاحظاتهم.
- أسأل الطلبة:
  - » ما العلاقة بين قياسي الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري؟ لماذا؟ مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين يساوي $180°$
- أستمع لإجابات الطلبة، ثم أسألهم كل مرَّة:
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  - » ما هذه الإجابة؟
  - » أكتب نص النظرية على اللوح.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد زوايا في الدائرة ضمن مضلع رباعي دائري.

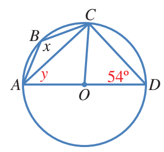
تنويع التعليم:

توسعة: أطلب إلى الطلبة ذوي المستوى فوق المتوسط إثبات أنَّ مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي °180.

مثال 4

- أرسم على اللوح دائرة، ثم أرسم مماسًّا لها، ووترًا فيها يمر بنقطة التماس، مُبيِّنًا للطلبة أنَّ الزاوية المحصورة بين المماس والوتر تُسمّى زاوية مماسية.
- أرسم زاوية محيطية تقابل القوس المقابل للزاوية المماسية، ثم أطلب إلى الطلبة التحقُّق من أنَّ لهاتين الزاويتين القياس نفسه.
- أُوزِّع على الطلبة نسخًا من **ورقة المصادر 1: الزوايا المماسية**، ثم أطلب إليهم تحديد الزاوية المحيطية المشتركة مع الزاوية المماسية في القوس نفسه، والتحقُّق من تساوي قياسيهما، وكتابة الحرف نفسه على الزوايا المتطابقة.
- أُتابع الطلبة في أثناء أدائهم المهمة المطلوبة، لا سيَّما ما يتعلَّق منها بالشكل الثالث، وأتأكَّد أنَّه كُتِب على إحدى الزاويتين الحرف p، وكُتِب على الأخرى الحرف q، ثم أسألهم:
  » كيف يُثبِت الشكل الثالث أنَّ مجموع قياسي الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري هو °180؟ p، و q هما قياسا زاويتين متجاورتين تُكوِّنان زاوية مستقيمة.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد قياس زوايا في الدائرة اعتمادًا على نظرية الزاوية المماسية.

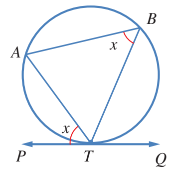
بطرح °43 منَ الطرفيْنِ	$y = 90° - 43°$
	$= 47°$
الشكلُ $ABCD$ رباعيٌّ دائريٌّ	$x + m\angle ADC = 180°$
المثلثُ OCD مُتطابِقُ الضلعيْنِ	$m\angle ADC = y = 47°$
بتعويضِ قيمةِ y	$x + 47° = 180°$
بطرح °47 منَ الطرفيْنِ	$x = 180° - 47°$
	$= 133°$



أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟

$x = 126°$; $y = 36°$



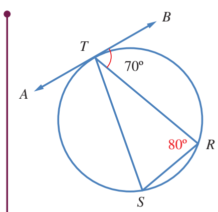
في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{PQ}$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ عندَ النقطةِ T، وَ $\overline{TA}$ هوَ وترٌ للدائرةِ. تُسمّى الزاويةُ المحصورةُ بينَ المماسِّ والوترِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ **الزاويةَ المماسِّيةَ** (angle between a tangent and a chord). وهذهِ الزاويةُ تحصرُ القوسَ $\widehat{TA}$، ويُمكِنُ ملاحظةُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المماسِّيةِ PTA يساوي قياسَ الزاويةِ المحيطيةِ ABT المرسومةِ على القوسِ $\widehat{TA}$ نفسِهِ.

نظريةٌ — **الزاويةُ المماسيةُ والزاويةُ المحيطيةُ**

قياسُ الزاويةِ المماسِّيةِ يساوي قياسَ الزاويةِ المحيطيةِ المشتركةِ معَها في القوسِ:

$$m\angle ATP = m\angle ABT$$

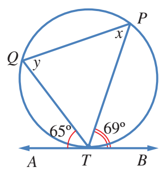
مثال 4



في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ للدائرةِ في T. أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ ATS وَ TSR.

زاويتانِ (مماسِّيةٌ، ومحيطيةٌ) مشتركتانِ في القوسِ	$m\angle ATS = m\angle TRS = 80°$
زاويتانِ (مماسِّيةٌ، ومحيطيةٌ) مشتركتانِ في القوسِ	$m\angle TSR = m\angle BTR = 70°$

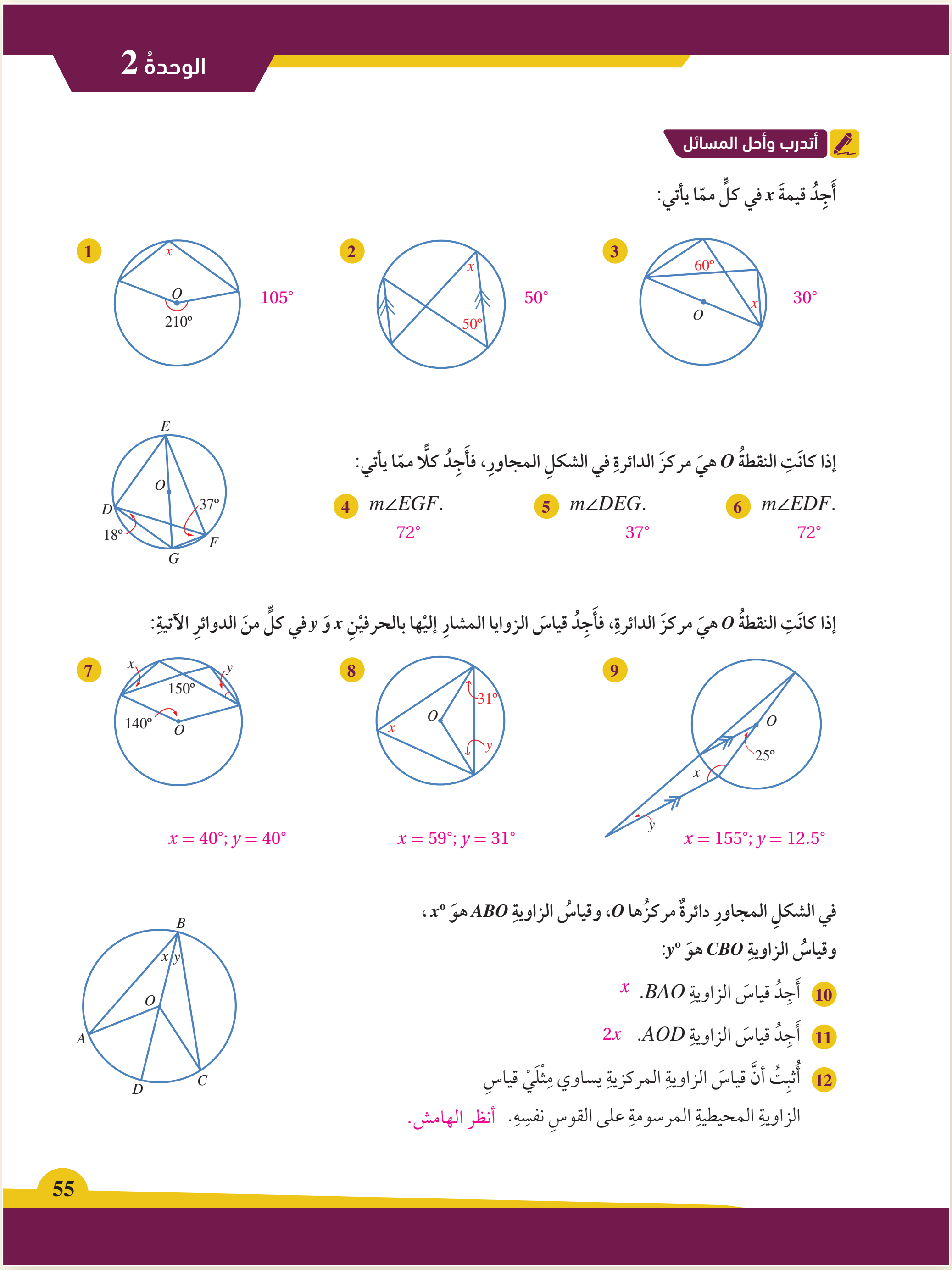
أتحقق من فهمي



في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ للدائرةِ في T.

أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزوايا: TQP، TPQ، وَ QTP.

$m\angle TPQ = 65°$
$m\angle TQP = 69°$
$m\angle QTP = 46°$



الوحدةُ 2

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $105°$

2) $50°$

3) $30°$

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

4) $m\angle EGF$. $72°$

5) $m\angle DEG$. $37°$

6) $m\angle EDF$. $72°$

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ، فأَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بالحرفيْنِ x وَ y في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

7) $x = 40°; y = 40°$

8) $x = 59°; y = 31°$

9) $x = 155°; y = 12.5°$

في الشكلِ المجاورِ دائرةٌ مركزُها O، وقياسُ الزاويةِ ABO هوَ $x°$، وقياسُ الزاويةِ CBO هوَ $y°$:

10) أَجِدُ قياسَ الزاويةِ BAO. x

11) أَجِدُ قياسَ الزاويةِ AOD. $2x$

12) أُثبتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ. أنظر الهامش.

55

إرشاد:

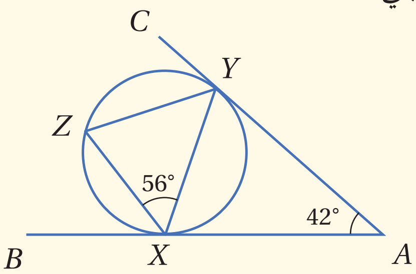
قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في حل مسائل تتعلق بالزوايا في الدائرة، وبخاصة عندما يكون المطلوب إيجاد أكثر من زاوية واحدة في الشكل؛ لذا أُوجِّههم إلى كتابة جميع الزوايا التي يعرفونها على الشكل قبل البدء بالحل.

إجابات الأسئلة:

$$\begin{aligned} 12)\quad m\angle AOC &= m\angle AOD + m\angle DOC \\ &= 2x + 2y \\ &= 2(x + y) \\ &= 2\, m\angle AOB \end{aligned}$$

مثال إضافي:

- في الشكل الآتي، $\overrightarrow{AB}$، و $\overrightarrow{AC}$ مماسان لدائرة في النقطتين X، و Y. أجد قياس الزاوية XYZ، مُبرِّرًا إجابتي.



$$m\angle YXA = \frac{180° - 42°}{2} = 69°$$

(المثلث AXY متطابق الضلعين؛ لأنَّ $AX = AY$).

$$m\angle ZXB = 180° - (69° + 56°) = 55°$$

(AXB خط مستقيم).

$$m\angle XYZ = m\angle ZXB = 55°$$

(زاوية مماسية وزاوية محيطية مشتركتان في القوس نفسه).

4 التدريب

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

- أُوجِّـه الطلبـة إلى بند (**أتـدرَّب وأحل المسـائل**)، ثم أطلـب إليهم حل المسـائل (9–1)، والمسـائل (15 – 13)، والمسائل (25 – 22) ضمن مجموعات ثنائية داخـل الغرفة الصفية؛ فهذه المسـائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشـرًا بأمثلة الدرس، وهي تُسـتعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسـها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحـد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسـألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ اسـتراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تسـاؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (29 –27).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية مـن الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (10 – 12) كتاب التمارين: (1 – 8)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (16 – 21), 26 كتاب التمارين: 3, 5, 7, 9
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 21,(26 – 29) كتاب التمارين: (8 – 10) ,6

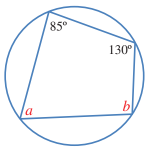
تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند **(أتدرَّب وأحل المسائل)**، فإنَّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

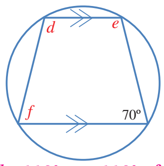
المفاهيم العابرة:

أُؤكِّد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين. ففي أسئلة البرهان الرياضي جميعها، والتبرير تحديدًا ضمن السؤالين 28 ،26، أُوجِّه الطلبة إلى اتباع الخطوات المنطقية المتسلسلة في أثناء البرهان، وكتابة تبريراتهم لكل خطوة، وكيفية حصولهم على الإجابة، ما يُعزِّز لديهم المهارات الحياتية، ومهارات التفكير، مثل: التحليل والربط والتفسير، وتقديم الأدلة والبراهين.

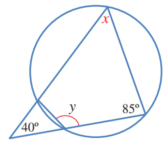
أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

13 

$a = 50°; b = 95°$

14 

$d = 110°; e = 110°, f = 70°$

15 

$x = 55°; y = 125°$

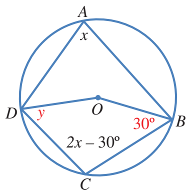
في الشكلِ الرباعيِّ الدائريِّ $PQRT$ ، قياسُ الزاويةِ ROQ هوَ °38، حيثُ O مركزُ الدائرةِ، وَPOT قُطرٌ فيها يوازي QR. أَجِدْ قياسَ كلٍّ منَ الزوايا الآتيةِ:

16 ROT. 71°

17 QRT. 125.5°

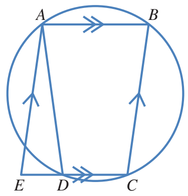
18 QPT. 54.5°

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O:



19 لماذا $3x - 30° = 180°$؟ أنظر الهامش.

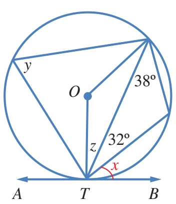
20 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ CDO المشارِ إليْها بالحرفِ y، مُبرِّرًا كلَّ خطوةٍ في حَلّي. أنظر الهامش.



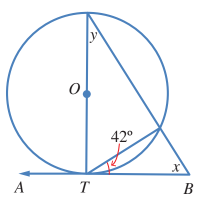
21 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ $ABCE$ متوازيَ أضلاعٍ. أُبيِّنُ أنَّ قياسَ الزاويةِ AED يساوي قياسَ الزاويةِ ADE، مُبرِّرًا كلَّ خطوةٍ في حَلّي.

أنظر ملحق الإجابات.

أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

22 

$x = 38°; y = 70°; z = 20°$

23 

$x = 48°; y = 42°$

56

إجابات الأسئلة:

19) الزاويتان A، و C متقابلتان في مضلع رباعي دائري، ومجموع قياسيهما 180°، إذن:

$$x + (2x - 30°) = 180°$$
$$3x - 30° = 180°$$

20) $3x = 210°$

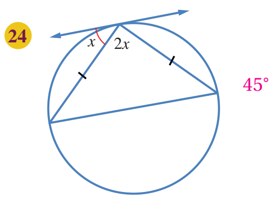
$$x = 70°$$

$m\angle DCB = 140° - 30° = 110°$, $m\angle DOB = 2 \times 70° = 140°$

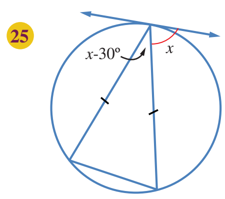
بما أنَّ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي هو 360°، فإنَّ:

$110° + 140° + 30° + y = 360°$ $\qquad$ $y = 360° - 280° = 80°$

أجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ الشكلَيْنِ الآتييْنِ:

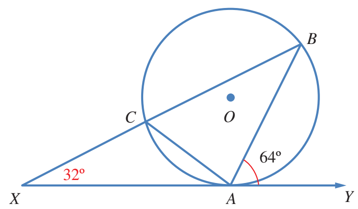
24 

45°

25 

70°

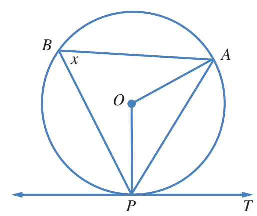
26 تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ الدائرةِ في الشـكلِ الآتي، ويُمثِّلُ $\overleftrightarrow{XY}$ مماسًّا للدائرةِ عندَ A. إذا كانَتِ النقاطُ B وَ C وَ X تُمثِّلُ خطًّا على استقامةٍ واحدةٍ، فأُثبِتُ أنَّ المثلثَ ACX مُتطابقُ الضلعيْنِ، مُبرِّرًا إجابتي. انظر ملحق الإجابات.



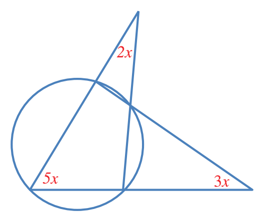
مهارات التفكير العليا

27 **تبرير:** قالَتْ فاتنُ إنَّ الزاويةَ المحيطيةَ المرسومةَ على قُطْرِ الدائرةِ زاويةٌ قائمةٌ. هلْ قولُ فاتنَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.

28 **تبرير:** في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{PT}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ PBA هوَ $x°$، فأُثبِتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ APT يساوي قياسَ الزاويةِ ABP، مُبرِّرًا خطواتِ الحَلِّ.
أنظر ملحق الإجابات.



29 **تحدٍّ:** أجِدُ قيمةَ x في الشكلِ المجاورِ.
أنظر ملحق الإجابات.



57

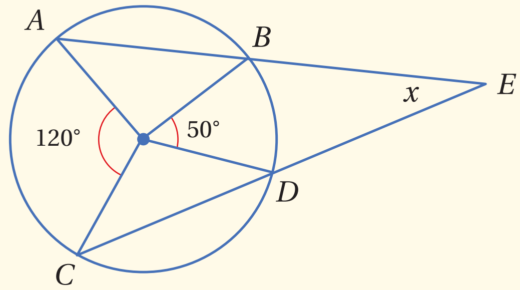
إرشاد: في السؤال 29 (تحد)، أُذكِّر الطلبة بنظرية الزاوية الخارجية للمثلث التي تنص على أن قياس الزاوية الخارجية في المثلث تساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.

إجابات الأسئلة:

27) نعم، هي على صواب؛ لأنَّ الزاوية المقابلة لقُطْر الدائرة تشترك في القوس مع زاوية مركزية مستقيمة قياسها °180 ؛ لذا يكون قياسها نصف °180 ؛ أيْ °90.

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:
  » في الشكل الآتي، إذا كانت O هي مركز الدائرة، فأجد قيمة x، مُبيِّنًا خطوات الحل. °35
  (**إرشاد:** أرسم الوتر $\overline{BC}$).

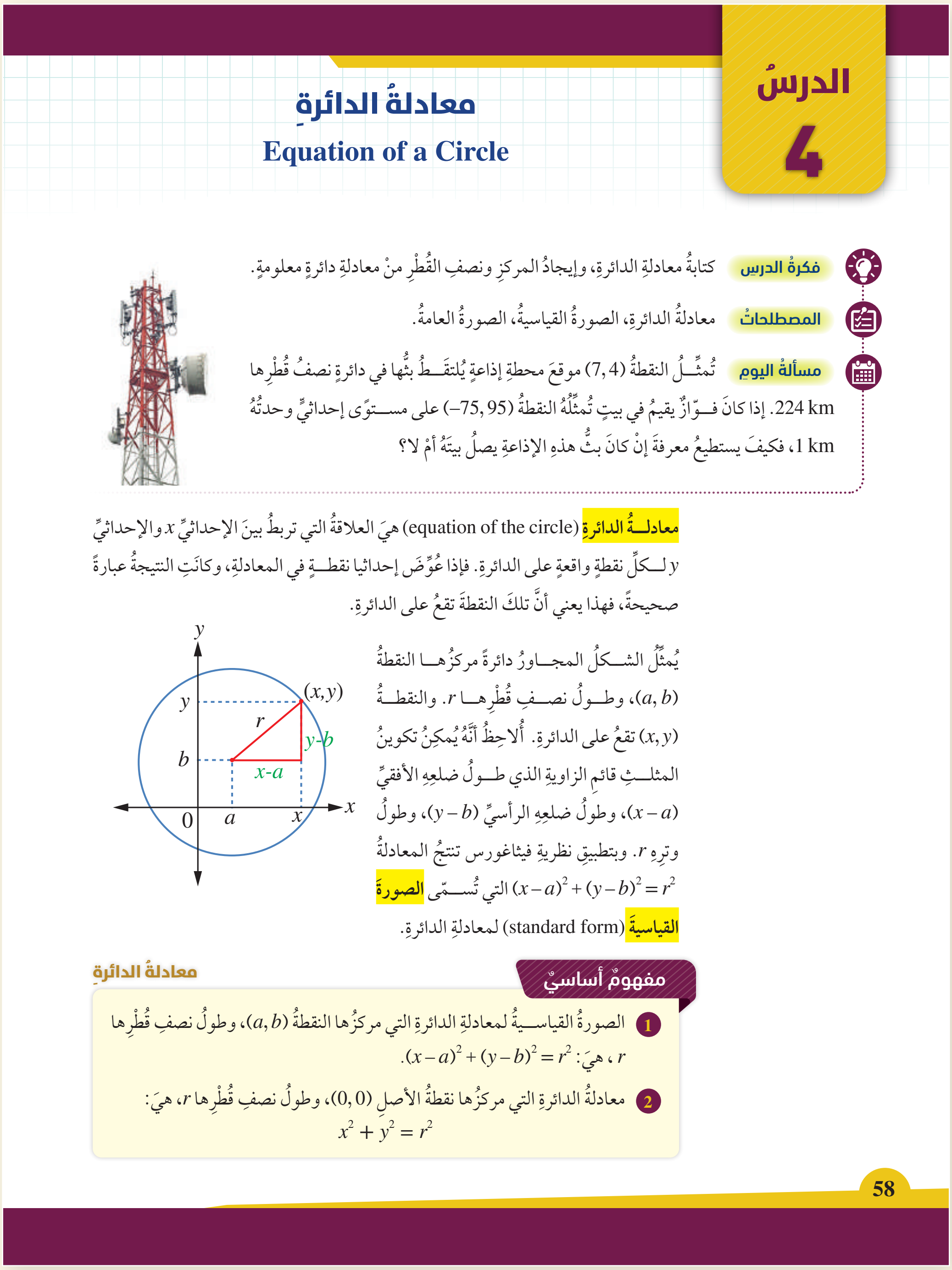


تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة الذين تناول نموذجهم أضلاعًا أو زوايا في الدائرة تنفيذ الخطوة الثالثة من المشروع، واستعمال برمجية جيوجبرا لرسم النموذج في جهاز الحاسوب، وإيجاد قياسات زواياه وأطوال أضلاعه، مُذكِّرًا إيّاهم بضرورة إكمالهم التقرير الذي بدؤوا إعداده، وتضمينه تفسيرًا للخاصية التي يتمتع بها نموذجهم.
- أُوجِّه الطلبة الى الاستعانة بمُعلِّم/ بمُعلِّمة الحاسوب، أو قيِّم المختبر، أو أحد زملائهم الذين يمتلكون مهارات حاسوبية في حال واجهتهم مشكلة ما في استعمال الجهاز أو البرمجية.

6 الختام

- أطلب إلى الطلبة أنْ يكتبوا قائمة تحوي جميع النظريات التي درسوها في هذه الوحدة، وأنْ يُميِّز كلٌّ منهم أكثر نظرية أتقن حل أسئلتها بلون مُميَّز. وكذلك تمييز النظرية التي واجه صعوبة في إتقان حلها بلون أحمر، فضلًا عن ذكر مقترحاته بخصوص كيفية مواجهة هذا التحدي؛ **ما يُعزِّز لديهم مهارات إدارة الذات وحل المشكلات.**



الدرس 4

معادلةُ الدائرةِ
Equation of a Circle

فكرةُ الدرسِ كتابةُ معادلةِ الدائرةِ، وإيجادُ المركزِ ونصفِ القُطْرِ منْ معادلةِ دائرةٍ معلومةٍ.

المصطلحاتُ معادلةُ الدائرةِ، الصورةُ القياسيةُ، الصورةُ العامةُ.

مسألةُ اليومِ تُمثِّلُ النقطةُ $(7, 4)$ موقعَ محطةِ إذاعةٍ يُلتقَطُ بثُّها في دائرةٍ نصفُ قُطْرِها 224 km. إذا كانَ فوّازٌ يقيمُ في بيتٍ تُمثِّلُهُ النقطةُ $(-75, 95)$ على مستوًى إحداثيٍّ وحدتُهُ 1 km، فكيفَ يستطيعُ معرفةَ إنْ كانَ بثُّ هذهِ الإذاعةِ يصلُ بيتَهُ أمْ لا؟

معادلةُ الدائرةِ (equation of the circle) هيَ العلاقةُ التي تربطُ بينَ الإحداثيِّ x والإحداثيِّ y لكلِّ نقطةٍ واقعةٍ على الدائرةِ. فإذا عُوِّضَ إحداثيا نقطةٍ في المعادلةِ، وكانَتِ النتيجةُ عبارةً صحيحةً، فهذا يعني أنَّ تلكَ النقطةَ تقعُ على الدائرةِ.

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها النقطةُ (a, b)، وطولُ نصفِ قُطْرِها r. والنقطةُ (x, y) تقعُ على الدائرةِ. أُلاحِظُ أنَّهُ يُمكِنُ تكوينُ المثلثِ قائمِ الزاويةِ الذي طولُ ضلعِهِ الأفقيِّ $(x-a)$، وطولُ ضلعِهِ الرأسيِّ $(y-b)$، وطولُ وترِهِ r. وبتطبيقِ نظريةِ فيثاغورس تنتجُ المعادلةُ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ التي تُسمّى **الصورةَ القياسيةَ** (standard form) لمعادلةِ الدائرةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ — **معادلةُ الدائرةِ**

1. الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (a, b)، وطولُ نصفِ قُطْرِها r، هيَ: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
2. معادلةُ الدائرةِ التي مركزُها نقطةُ الأصلِ $(0, 0)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها r، هيَ:
$$x^2+y^2=r^2$$

58

الدرس 4

نتاجات الدرس

- إيجاد معادلة الدائرة بالصورة القياسية.
- إيجاد معادلة الدائرة بالصورة العامة.
- إيجاد مركز الدائرة ونصف قُطْرها إذا أُعطيت معادلتها.
- إيجاد طول القطعة المماسية من نقطة خارجية إلى نقطة التماس على دائرة عُلِمت معادلتها.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية.
- تعيين النقاط في المستوى الإحداثي.
- حساب المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

ملاحظاتي

1 التهيئة

- أُذكِّر الطلبة بنظرية فيثاغورس، وقانون المسافة بين نقطتين.
- أطلب إلى الطلبة تعيين النقاط الآتية في المستوى الإحداثي: $A(-1, 4), B(3,6), C(0, 12)$، ثم إيجاد الأطوال:
  » AB, AC, BC، وتحديد نوع المثلث ABC مع بيان السبب. المثلث قائم الزاوية في B؛ لأنَّه يُحقِّق نظرية فيثاغورس.
- أطلب إلى الطلبة إيجاد إحداثيي نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{AB}$، و $\overline{AC}$. $(-0.5, 8), (1, 5)$
- اكتب المعادلة الآتية: $x^2 + y^2=9$ ، ثم أسأل الطلبة:
  » ماذا تعرفون عن هذه المعادلة؟
  » هل رأيتم مثلها سابقًا؟
- أستمع لإجابات أكبر عدد منهم، ثم أُخبِرهم أنَّهم سيتعرَّفون مثل هذه المعادلات في هذا الدرس.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » ماذا تمثل النقطة $(7, 4)$ في هذه المسألة؟ موقع المحطة، ومركز الدائرة التي يصلها البث.
  » ماذا تمثل النقاط التي يصلها بث هذه المحطة الإذاعية؟ النقاط الواقعة على الدائرة، والنقاط الواقعة داخل الدائرة.
  » كيف تعرف إن كانت نقطة ما واقعة على الدائرة، أو داخلها، أو خارجها؟ بإيجاد بُعْدها عن مركز الدائرة، ومقارنته بطول نصف قطر الدائرة.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

3 التدريس

- أُذكِّر الطلبة بمعادلة الخط المستقيم، ثم أُبيِّن لهم أنَّ مفهوم معادلة أيِّ منحنى في المستوى الإحداثي يعني وجود علاقة تربط بين إحداثيي النقاط الواقعة عليه.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه يمكن إيجاد معادلة الدائرة بفرض نقطة $P(x, y)$ على محيطها، وإيجاد العلاقة التي تربط بين x، و y برسم مثلث قائم الزاوية، أحد رؤوسه النقطة P، والرأس الآخر مركز الدائرة، ثم تطبيق نظرية فيثاغورس عليه، أو استعمال قانون المسافة بين نقطتين.
- أُناقِش الطلبة في طريقة التوصُّل إلى الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة، ثم أذكر أمثلة بسيطة عليها، مُبيِّنًا كيف يمكن إيجاد إحداثيي المركز وطول نصف القُطْر لدائرة أُعطِيت معادلتها بالصورة القياسية:
- اكتب المعادلة: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$، ثم أسأل الطلبة:
  » ما إحداثيا مركز هذه الدائرة؟ $(2, 3)$.
  » ما طول نصف قُطْرها؟ 5 وحدات طول.
  » أيُّ النقاط تقع على هذه الدائرة: $A(-2, 6)$ ، أم $B(5, -2)$، أم $C(-1, 7)$؟ النقطتان A، و C تقعان عليها.
  » إذا كان الإحداثي x لنقطة واقعة على هذه الدائرة هو 6، فماذا يكون الإحداثي y لها؟ $y = 0$، أو $y = 6$

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حـــل المثال 1 الذي يُبيِّن كيفية كتابة معادلة دائرة بالصورة القياسية إذا عُلِم مركزها وطول نصف قُطْرها.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

- أُوجِّه الطلبة إلـــى حل التدريب في بنـــد (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال.
- أختار بعض الإجابـــات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشـــها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أخطاء شائعة:

قد يُعوِّض بعض الطلبة الطول المعطى في الســـؤال بدل نصـــف قُطْر الدائرة في المعادلـــة من دون انتباه إلى أنَّ المعطى طول قُطْر، أو نصف قُطْر؛ لذا أُنبِّههم على التحقُّق من الطول المعطى، فإنْ كان قُطْرًا وجب عليهم قسمته على 2؛ لينتج نصف القُطْر الذي يجب تعويضه في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة.

مثال 1

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

1) المركزُ هوَ النقطةُ (7 ,2–)، وطولُ نصفِ القُطْرِ 6 وحداتٍ.

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ

$(x-(-2))^2+(y-7)^2=6^2$ $\quad (a,b)=(-2,7), r=6$

$(x+2)^2+(y-7)^2=36$

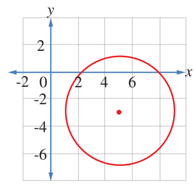
2) المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ القُطْرِ 5 وحداتٍ.

$x^2+y^2=r^2$ الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرة التي مركزُها نقطةُ الأصلِ

$x^2+y^2=5^2$ بتعويضِ $r=5$

$x^2+y^2=25$

3) الدائرةُ المرسومةُ في المستوى الإحداثيِّ المجاورِ.



عنـــدَ النظرِ إلى الدائرةِ يَتبيَّـــنُ أنَّ مركزَها النقطـــةُ (3–,5)، وأنَّ طولَ نصفِ قُطْرِها 4 وحداتٍ.

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ

$(x-5)^2+(y-(-3))^2=4^2$ $\quad (a, b) = (5, -3), r = 4$

$(x-5)^2+(y+3)^2=16$

أتحقق من فهمي

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ في الحالتيْنِ الآتيتيْنِ: أنظر الهامش.

a) المركزُ هوَ النقطةُ (4 ,0)، وطولُ نصفِ القُطْرِ 9 وحداتٍ.

b) المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ القُطْرِ 8 وحداتٍ.

إذا عُلِمَ مركزُ الدائرةِ ونقطةٌ واقعةٌ عليْها، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ طولِ نصفِ القُطْرِ باســـتعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ، ثمَّ كتابةُ معادلةِ الدائرةِ.

مراجعةُ المفهومِ — **طولُ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ النقطتيْنِ**

إذا كانَ طولُ القطعةِ المســـتقيمةِ الواصلةِ بينَ النقطتيْـــنِ $A(x_1,y_1)$، وَ $B(x_2,y_2)$، هوَ d فإنَّ:

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

إجابة سؤال التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 1):

a) $x^2+(y-4)^2=81$

b) $x^2+y^2=16$

مثال 2

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 الذي يُبيِّن كيفية كتابة معادلة دائرة بالصورة القياسية إذا عُلِم مركزها ونقطة واقعة عليها.

مثال إضافي:

- أكتب معادلة دائرة مركزها $(-1, 3)$، وتمر بالنقطة $(-4, 6)$. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 18$

مثال 2

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ $(-7, 13)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(5, 4)$.

أَجِدُ طولَ نصفِ القُطْرِ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ:

قانونُ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

بالتعويضِ $r^2 = (5-(-7))^2 + (4-13)^2$

بالتبسيطِ $= 144 + 81$

$= 225$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ $r = \sqrt{225} = 15$

والآنَ، أُعوِّضُ إحداثيَّيِ المركزِ وقيمةَ r^2 في الصورةِ القياسيةِ لمعادلةِ الدائرةِ، فأَجِدُ أنَّ معادلةَ هذهِ الدائرةِ هيَ:

$(x+7)^2 + (y-13)^2 = 225$.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ $(4, -3)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(2, 0)$. انظر الهامش.

إذا علمْنا معادلةَ دائرةٍ بالصورةِ القياسيةِ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$، حيثُ $r > 0$ فإنَّهُ يُمكِنُ فكُّ الأقواسِ وإعادةُ الترتيبِ، فتنتجُ المعادلةُ: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$.

يُمكِنُ أيضًا كتابةُ هذهِ المعادلةِ بالصورةِ الآتيةِ:

$$x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

حيثُ: $f = -a, g = -b, c = a^2 + b^2 - r^2$، وهيَ تُسمّى **الصورةَ العامةَ** (general form) لمعادلةِ الدائرةِ.

إذا علمْنا الصورةَ العامةَ لمعادلةِ أيِّ دائرةٍ، فإنَّهُ يُمكِنُ تحويلُها إلى الصورةِ القياسيةِ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$، وذلكَ بإكمالِ المربَّعِ.

مراجعةُ المفهومِ **إكمالُ المربّعِ**

لإكمالِ المربَّعِ للحدَّيْنِ $x^2 + ax$، يضافُ $\left(\frac{a}{2}\right)^2$، ثمَّ يُطرَحُ، فينتجُ مربَّعٌ كاملٌ هوَ $(x + \frac{a}{2})^2$ وبذلكَ يتحوَّلُ $x^2 + ax$ إلى $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

إجابة سؤال التدريب في بند (أتحقّق من فهمي 2):

$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 13$

مثال 3

- أُناقِش الطلبة في عملية تحويل معادلة الدائرة من الصورة القياسية إلى الصورة العامة.
- أكتب معادلة دائرة بالصورة القياسية، مثل: $(x-2)^2+(y-3)^2=49$، ثم أطلب إلى الطلبة تحويلها إلى الصورة العامة.
- أُذكِّر الطلبة بضرورة إكمال المربع، مُبيِّنًا لهم طريقة تحويل معادلة دائرة من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بإكمال المربع.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يُبيِّن كيفية الانتقال من الصورة العامة إلى الصورة القياسية، وإيجاد إحداثيي مركز الدائرة، وطول نصف قُطْرها من معادلتها.

إرشاد: أُنبِّه الطلبة إلى ضرورة قسمة طرفي المعادلة على معامل x^2 (الذي يكون مطابقًا لمعامل y^2 في معادلة الدائرة) إنْ لم يكن 1 قبل إكمال المربع.

أخطاء شائعة:

قد يظن بعض الطلبة أنَّ مركز الدائرة $(x+6)^2+(y-2)^2=17$ هو $(6\ ,\ -2)$؛ لذا أُنبِّههم إلى أنَّ 6 تساوي $-a$، وأنَّ -2 تساوي $-b$ في الصورة القياسية.

وبذلك، فإنَّ: $a=-6,\ b=2$، أو تحويلها إلى: $(x-(-6))^2+(y-2)^2=17$، ومقارنتها بـ: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

حيث يسهل استنتاج قيمة كلٍّ من a، و b، و r.

مثال 3

أَجِدُ إحداثياتِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ للدائرةِ $x^2+y^2-8x+6y-56=0$.

بإكمالِ المربَّعِ للحدودِ التي تحوي x ينتجُ: $x^2-8x=(x-4)^2-16$، وبإكمالِ المربَّعِ للحدودِ التي تحوي y ينتجُ: $y^2+6y=(y+3)^2-9$.

وبذلكَ يُمكِنُ تحويلُ المعادلةِ $x^2+y^2-8x+6y-56=0$ إلى:

$$(x-4)^2-16+(y+3)^2-9-56=0$$

$$(x-4)^2+(y+3)^2=81$$

بمقارنةِ هذهِ المعادلةِ بالصورةِ القياسيةِ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$، نجدُ أنَّ:

$$a=4\ ,\ b=-3,\ r=9.$$

إذنْ، مركزُ هذهِ الدائرةِ هوَ النقطةُ $(4,-3)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 9 وحداتٍ.

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

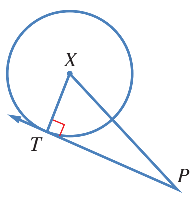
أَجِدُ إحداثياتِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ للدائرةِ $x^2+y^2+2x-10y-10=0$.

تعلَّمْتُ في درسٍ سابقٍ أنَّ مماسَّ الدائرةِ يشتركُ معَ الدائرةِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، وأنَّهُ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ. وهذا يفيدُ في التحقُّقِ منْ أنَّ مستقيمًا معطًى هوُ مماسٌّ لدائرةٍ معطاةٍ، وحسابِ طولِ قطعةٍ مماسِّيةٍ كما في المثالَيْنِ الآتيَيْنِ.

مثال 4

أَجِدُ طولَ المماسِّ المرسومِ منَ النقطةِ $P(6,-6)$، الذي يمسُّ الدائرةَ التي معادلتُها

$$(x+5)^2+(y-4)^2=25$$



أَرسمُ مُخطَّطًا، ولتكنِ النقطةُ X مركزَ الدائرةِ، وَ T نقطةَ التَّماسِّ.

لحسابِ طولِ المماسِّ $\overline{PT}$، ثُم أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورس على المثلثِ القائمِ XTP، الذي يُمكِنُ إيجادُ طولَيْ ضلعيْنِ فيهِ، هما: نصفُ القُطْرِ $\overline{XT}$، والوترُ $\overline{XP}$.

طولُ نصفِ القُطْرِ XT هوَ 5. ولحسابِ XP، أَجِدُ المسافةَ بينَ مركزِ الدائرةِ $X(-5,4)$ والنقطةِ $P(6,-6)$ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ:

$(XP)^2=(6-(-5))^2+(-6-4)^2=(11)^2+(-10)^2=221$.

وبتطبيقِ نظريةِ فيثاغورس على المثلثِ XTP:

$(PT)^2=(XP)^2-(XT)^2$ نظريةُ فيثاغورس

إجابة سؤال التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 3):

$(-1,5);\ r=6$

بالتعويضِ $= 221 - 25$

بالتبسيطِ $=196$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ $PT = \sqrt{196} = 14$

إذنْ، طولُ المماسِّ 14 وحدةً.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ المماسِّ المرسومِ منَ النقطةِ $P(7, 4)$، الذي يمسُّ الدائرةَ التي معادلتُها $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 81$ 7 وحدات.

مثال 5

أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 2x + 3$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 45$

أَحُلُّ النظامَ المُكوَّنُ منَ المعادلتيْنِ: $y = 2x + 3$، وَ $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 45$؛ لإيجادِ عددِ نقاطِ تقاطعِ المستقيمِ والدائرةِ. فإذا كانَ عددُ نقاطِ التقاطعِ واحدًا فقطْ، فإنَّ المستقيمَ يكونُ مماسًّا للدائرةِ.

بتعويضِ $y = 2x + 3$ في معادلةِ الدائرةِ $(x - 10)^2 + (2x + 3 - 8)^2 = 45$

بالتبسيطِ $(x - 10)^2 + (2x - 5)^2 = 45$

بفكِّ الأقواسِ $x^2 - 20x + 100 + 4x^2 - 20x + 25 = 45$

بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، وجعلِ الطرفِ الأيمنِ صفرًا $5x^2 - 40x + 80 = 0$

بقسمةِ الطرفيْنِ على 5 $x^2 - 8x + 16 = 0$

بالتحليلِ $(x - 4)^2 = 0$

$x = 4$

بتعويضِ قيمةِ x في إحدى المعادلتيْنِ لإيجادِ قيمةِ y $y = 2(4) + 3 = 11$

بما أنَّ هذا المستقيمَ يقطعُ الدائرةَ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ هيَ $(4, 11)$، فإنَّهُ مماسٌّ للدائرةِ.

أتحقق من فهمي

أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 4x - 5$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها $(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 68$ أنظر الهامش.

إجابة سؤال التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 5):

بتعويض $y = 4x-5$ في المعادلة: $(x+5)^2 + (y-9)^2 = 68$، تنتج المعادلة: $17x^2 - 102x + 153 = 0$ وبقسمة هذه المعادلة على 17، تنتج المعادلة: $x^2 - 6x + 9 = 0$ التي لها حل واحد، هو: $x = 3$. وبتعويض القيمة $x = 3$ في المعادلة $y = 4x - 5$، فإنَّ: $y = 7$. إذن، هذا المستقيم هو مماس للدائرة؛ لأنَّه يتقاطع معها في نقطة واحدة فقط، هي: $(3, 7)$.

تنويع التعليم:

توسعة:

- أطلب إلى الطلبة تحديد الشكل الذي تُمثِّله المعادلات الآتية:
  - » $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 10 = 0$ دائرة.
  - » $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 20 = 0$ نقطة.
  - » $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 15 = 0$ لا شيء.
- أطلب إلى الطلبة ذكر الشرط الذي يجعل المعادلة: $x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$ تُمثِّل دائرة.
  $f^2 + g^2 - c > 0$

المثالان 4 و 5

- أُذكِّر الطلبة بخصائص مماس الدائرة، ثم أُناقِشهم في حل المثال 4 الذي يُبيِّن كيفية حساب طول القطعة المماسية إذا عُلِمت معادلة الدائرة والنقطة التي رُسِم منها المماس.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 5 الذي يُبيِّن طريقة الحكم على أنَّ مستقيمًا معلومًا هو مماس لدائرة أم لا.

مثال إضافي:

- هل المستقيم $x - 7y + 12 = 0$ مماس للدائرة التي معادلتها: $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 100$؟ أُبرِّر إجابتي.
  هذا المستقيم ليس مماسًّا لهذه الدائرة؛ لأنَّه يتقاطع معها في نقطتين، هما: $(-5, 1)$، و $(9, 3)$.

4 التدريب

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (13 – 1)، ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (29 – 26).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (19 – 14) كتاب التمارين: (6 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (25 – 20) كتاب التمارين: (10 – 7)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (29 – 24) كتاب التمارين: (12 – 10), 8, 6

أتدرب وأحل المسائل

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

1. المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ قُطْرِها 7 وحداتٍ. $x^2+y^2=49$
2. المركزُ هوَ النقطةُ (3 ,1−)، وطولُ نصفِ قُطْرِها 5 وحداتٍ. $(x+1)^2+(y-3)^2=25$
3. المركزُ هوَ النقطةُ (2− ,3−)، وطولُ نصفِ قُطْرِها 10 وحداتٍ. $(x+3)^2+(y+2)^2=25$

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ المُعطى مركزُها وإحداثيّا نقطةٍ تمرُّ بها في كلٍّ ممّا يأتي:

4. المركزُ (2 ,1−)، وتمرُّ بالنقطةِ (5 ,3). $(x+1)^2+(y-2)^2=25$
5. المركزُ نقطةُ الأصلِ، وتمرُّ بالنقطةِ (4− ,9−). $x^2+y^2=97$

أَجِدُ إحداثيَّيِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

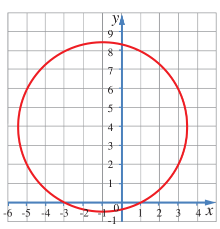
6. $(x+5)^2+(y-8)^2=36$ $r=6, (-5, 8)$
7. $(x-19)^2+(y-33)^2=400$ $r=20, (19, 33)$
8. $x^2+(y+4)^2=45$ $r=3\sqrt{5}, (0, -4)$
9. $(x-3)^2+(y+10)^2=28$ $r=2\sqrt{7}, (3, -10)$

أَجِدُ إحداثيَّيِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

10. $x^2+y^2-6x-10y+30=0$ $(3, 5), r=2$
11. $x^2+y^2+8x=9$ $(-4, 0), r=5$
12. $2x^2+2y^2+20x+36y+158=0$ $(-5, -9), r=3\sqrt{3}$
13. $x^2+y^2-18x+14y=14$ $(9, -7), r=12$

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ بالصورتيْنِ: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, $x^2+y^2+2fx+2gy+c=0$، حيثُ: f، وَ g، وَ c أعدادٌ صحيحةٌ في الحالاتِ الآتيةِ:

14. المركزُ (1− ,11−)، وطولُ القُطْرِ 26 وحدةً. أنظر الهامش.
15. المركزُ (0 ,3)، وطولُ نصفِ القُطْرِ $4\sqrt{3}$ وحداتٍ. أنظر الهامش.
16. المركزُ (7 ,4−)، وتمرُّ بالنقطةِ (3 ,1). أنظر الهامش.



17. أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ المُبيَّنةِ في الرسمِ البيانيِّ المجاورِ. أنظر الهامش.
18. أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. أنظر ملحق الإجابات.

إجابات الأسئلة:

14) $(x+11)^2+(y+1)^2=169$

$x^2+y^2+22x+2y-47=0$

15) $(x-3)^2+y^2=48$

$x^2+y^2-6x-39=0$

16) $(x+4)^2+(y-7)^2=41$

$x^2+y^2+8x-14y+24=0$

17) مركز هذه الدائرة هو (4 ,1−)، ومن المُلاحَظ أنَّها تمر بالنقطة (0 ,1)؛ لذا، فإنَّ مربع طول نصف قُطْرها: $2^2+4^2=20$

إذن، معادلتها هي: $(x+1)^2+(y-4)^2=20$

أو: $x^2+y^2+2x-8y-3=0$

19 أجدُ إحداثيَّي المركزِ وطولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ التي معادلتُها: $(2x-4)^2+(2y+6)^2=100$. أنظر ملحق الإجابات.

20 دائــرةٌ معادلتُها $x^2+y^2+px+6y=96$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 11 وحــدةً، وَ p عددٌ ثابتٌ موجبٌ. أَجِدُ بُعْدَ مركزِ الدائرةِ عنْ نقطةِ الأصلِ. أنظر ملحق الإجابات.

تُمثِّلُ النقطتانِ $D\ (2, 9)$، وَ $E\ (14, -7)$ نهايتَيْ قُطْرٍ لدائرةٍ مركزُها C:

21 أَجِدُ إحداثيَّي المركزِ C. $C\,(8, 1)$

22 أَجِدُ طولَ نصفِ القُطْرِ. $r=10$

23 أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ. $(x-8)^2+(y-1)^2=100$

24 أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y=3x-2$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها: $x^2+y^2+4x-24y+108=0$. أنظر ملحق الإجابات.

25 رُسِمَ مماسٌّ منَ النقطةِ $P\ (8, 5)$ للدائرةِ التي معادلتُها: $x^2+y^2+8x-6y-75=0$. أَجِدُ طولَ القطعةِ المستقيمةِ التي تصلُ النقطةَ P بنقطةِ التَّماسِّ. $4\sqrt{3}$

مهارات التفكير العليا

26 **تبريرٌ:** قالَ عبدُ الرحمنِ إنَّ $x^2+y^2-14x+6y+59=0$ ليسَتْ معادلةَ دائرةٍ. هلْ قولُ عبدِ الرحمنِ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

27 **تحــدٍّ:** ممرٌّ دائريٌّ محصورٌ بينَ دائرتيْنِ لهُما المركزُ نفسُــهُ، وهــوَ النقطةُ $(7, 3)$. إذا كانَــتِ الدائرةُ الكبرى تمسُّ المحــورَ y، والصغرى تمسُّ المحورَ x، فأَكتبُ معادلتَي الدائرتيْنِ اللتيْنِ تُشــكِّلانِ المحيــطَ الخارجيَّ والمحيطَ الداخليَّ للممرِّ، ثمَّ أَجِدُ مساحةَ الممرِّ بالوحداتِ المربَّعةِ. أنظر ملحق الإجابات.

28 **تحدٍّ:** رُسِمَ منَ النقطةِ $A\ (8, 21)$ مماسّانِ للدائرةِ التي مركزُها C، فمسّاها عندَ النقطتيْنِ D، وَ B. إذا كانَتْ معادلةُ الدائرةِ هيَ $(x-9)^2+(y+4)^2=49$، فما مساحةُ الشكلِ الرباعيِّ $ABCD$؟ أنظر ملحق الإجابات.

29 **تحدٍّ:** أَكتبُ الصورةَ القياسيةَ لمعادلةِ الدائرةِ $x^2+y^2+8x-10y+24=0$ منْ دونِ استعمالِ طريقةِ إكمالِ المربَّعِ. أنظر ملحق الإجابات.

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:
  - » أجد مركز الدائرة التي تمر بالنقاط: $A(4,0), B(-6,0), C(0,4)$، ثم أكتب معادلتها.
    المركز هو $(-1, -1)$، ومعادلة الدائرة هي: $(x+1)^2+(y+1)^2=26$
- أطلب إلى الطلبة استعمال برمجية جيوجبرا في المنزل لتحديد أيٍّ من المعادلات الآتية تُمثِّل معادلة دائرة، ثم أطلب إلى الطلبة ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط بيان ذلك جبريًّا:
  - » $x^2+y^2-10x+6y=-18$
  - » $x^2+y^2-18x+14y+14=0$
  - » $3x^2+4y^2-4x+6y+15=0$
  - » $2x^2+2y^2-4x+10y-20=0$

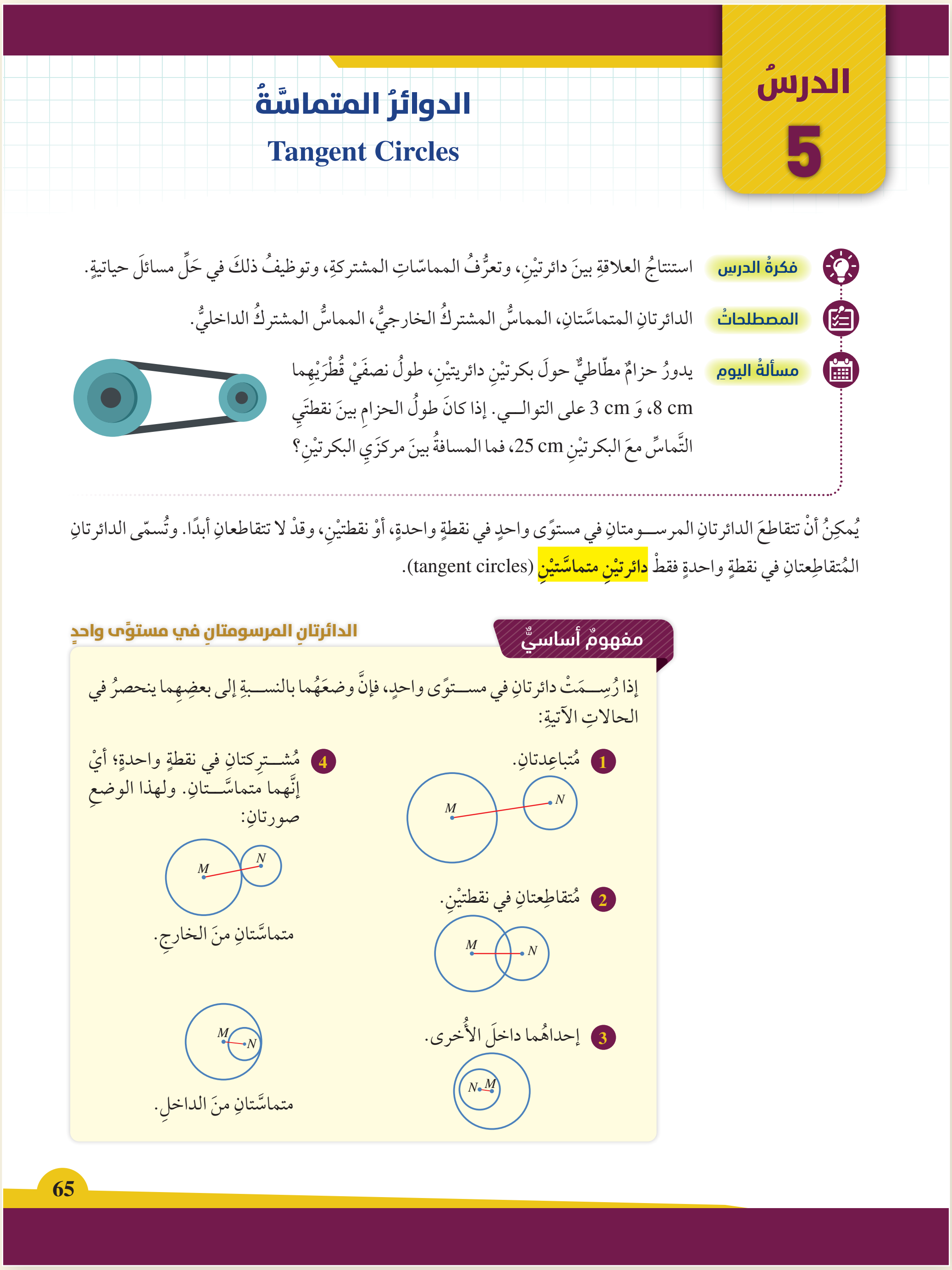
تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة الذين تناول نموذجهم معادلة الدائرة تنفيذ الخطوة الثالثة من المشروع، واستعمال برمجية جيوجبرا لرسم النموذج في جهاز الحاسوب، وإيجاد قياسات زواياه وأطوال أضلاعه، مُذكِّرًا إيّاهم بضرورة إكمالهم التقرير الذي بدؤوا إعداده، وتضمينه تفسيرًا للخاصية التي يتمتع بها نموذجهم.

6 الختام

- أطلب إلى الطلبة شرح طريقة إيجاد معادلة دائرة عُلِمت إحداثيات طرفي قُطْر فيها، ثم اتباع تلك الطريقة لإيجاد معادلة دائرة تُكوِّن النقطتان: $A(5, -6)$، و $B(13, 10)$ طرفي قُطْر فيها.
  $(x-9)^2+(y-2)^2=80$

الدرس 5


الدرس 5

الدوائرُ المتماسَّةُ
Tangent Circles

فكرةُ الدرس استنتاجُ العلاقةِ بينَ دائرتيْنِ، وتعرُّفُ المماسّاتِ المشتركةِ، وتوظيفُ ذلكَ في حَلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

المصطلحات الدائرتانِ المتماسَّتانِ، المماسُّ المشتركُ الخارجيُّ، المماسُّ المشتركُ الداخليُّ.

مسألةُ اليوم يدورُ حزامٌ مطّاطيٌّ حولَ بكرتيْنِ دائريتيْنِ، طولُ نصفَيْ قُطْرَيْهِما 8 cm، وَ 3 cm على التوالي. إذا كانَ طولُ الحزامِ بينَ نقطتَيِ التَّماسِّ معَ البكرتيْنِ 25 cm، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ البكرتيْنِ؟

يُمكِنُ أنْ تتقاطعَ الدائرتانِ المرسومتانِ في مستوًى واحدٍ في نقطةٍ واحدةٍ، أوْ نقطتيْنِ، وقدْ لا تتقاطعانِ أبدًا. وتُسمّى الدائرتانِ المُتقاطِعتانِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ **دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ** (tangent circles).

مفهومٌ أساسيٌّ الدائرتانِ المرسومتانِ في مستوًى واحدٍ

إذا رُسِمَتْ دائرتانِ في مستوًى واحدٍ، فإنَّ وضعَهُما بالنسبةِ إلى بعضِهِما ينحصرُ في الحالاتِ الآتيةِ:

1. مُتباعِدتانِ.
2. مُتقاطِعتانِ في نقطتيْنِ.
3. إحداهُما داخلَ الأُخرى.
4. مُشتركتانِ في نقطةٍ واحدةٍ؛ أيْ إنَّهما متماسَّتانِ. ولهذا الوضعِ صورتانِ:

متماسَّتانِ منَ الخارجِ.

متماسَّتانِ منَ الداخلِ.

65

نتاجات الدرس

- استنتاج العلاقة بين دائرتين.
- توظيف علاقة المسافة بين المركزين، وطولي نصفي القُطْرين لدائرتين، وطول المماس المشترك في إيجاد أطوال مجهولة.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- معرفة مفهوم مماس الدائرة، وخصائص المماسات.
- حساب طول القطعة المماسية.
- توظيف تشابه المثلثات في حل مسائل رياضية.

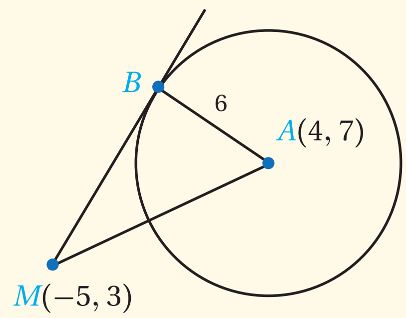
مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

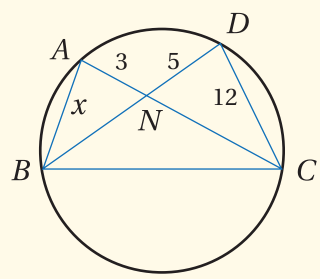
ملاحظاتي

1 التهيئة

- أُذكِّر الطلبة بمماس الدائرة، وخصائص المماس والمماسين المرسومين من نقطة خارج الدائرة، ثم أرسم الشكل الآتي الذي يُبيِّن المماس $\overrightarrow{MB}$ لدائرة مركزها A، ثم أطلب إليهم إيجاد طول القطعة المماسية $\overline{MB}$، وتبرير خطوات الحل.



- أسأل الطلبة عن مفهوم تشابه مثلثين، وشروط ذلك.
- أرسم الشكل المجاور، ثم أسأل الطلبة:



  » لماذا يكون المثلثان NCD، و NBA متشابهين؟
  » ما قيمة x؟ 7.2

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » أين يمكن أنْ تصادف مثل هذا الوضع؟ ستتنوَّع إجابات الطلبة.
  » ما وضع الدائرتين اللتين تُمثِّلان البكرتين؟ متباعدتان.
  » ماذا يُمثِّل جزء الحزام الممتد بين نقطتي التقائه مع البكرتين؟ يُمثِّل مماسًّا لكلتا الدائرتين.
  » كيف يمكن حساب المسافة بين مركزي البكرتين؟ باستعمال نظرية فيثاغورس؛ لوجود مثلثات قائمة.
- أستمع إلى إجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

3 التدريس

- أُذكِّر الطلبة بالأوضاع المختلفة لدائرتين في المستوى، وعلاقة المسافة بين مركزيهما وطولي نصفي قُطْريهما، ثم أذكر أمثلة على ذلك.
- أُوضِّح للطلبة مفهوم المماس المشترك لدائرتين، ثم أُدير حوارًا يقودهم إلى استنتاج نوعيه: الداخلي، والخارجي.
- أرسم دوائر في أوضاع مختلفة، ثم أطلب إلى الطلبة تحديد عدد المماسات المشتركة التي يمكن رسمها لهذه الدوائر.

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن مماسات مشتركة لدائرتين وعددها.

مثال إضافي:

- ما عدد المماسات المشتركة التي يمكن رسمها لدائرتين غير متقاطعتين؟ إذا كانتا متباعدتين فإنَّه يمكن رسم 4 مماسات مشتركة، وإذا كانت إحداهما داخل الأخرى فلا يوجد لهما مماسات مشتركة.

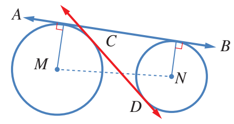
تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

- أُوجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال.
- أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

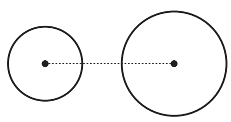
إذا كانَ المستقيمُ مماسًّا لكلٍّ منْ دائرتيْنِ، فإنَّهُ يُسمّى **مماسًّا مشتركًا** (common tangent). وإذا قطعَ المماسُّ المشتركُ القطعةَ المستقيمةَ الواصلةَ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ، فإنَّهُ يُسمّى **المماسَّ المشتركَ الداخليَّ** (common internal tangent)، وإلّا فإنَّهُ يُسمّى **المماسَّ المشتركَ الخارجيَّ** (common external tangent). ففي الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ مشتركٌ خارجيٌّ، وَ $\overleftrightarrow{CD}$ مماسٌّ مشتركٌ داخليٌّ.



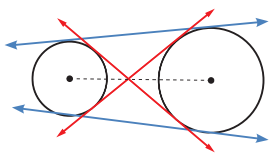
يُمكِنُ رسمُ مماسٍّ واحدٍ فقطْ للدائرةِ عندَ نقطةٍ عليْها، ويُمكِنُ أيضًا رسمُ مماسَّيْنِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها، فما عددُ المماسّاتِ المشتركةِ التي يُمكِنُ رسمُها للدائرتيْنِ؟ تعتمدُ إجابةُ هذا السؤالِ على وضعِ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما.

مثال 1

كمْ مماسًّا مُشترَكًا يُمكِنُ رسمُهُ للدائرتيْنِ في الشكلِ الآتي؟ أرسمُ المماسّاتِ، ثمَّ أُصنِّفُها إلى خارجيةٍ وداخليةٍ.



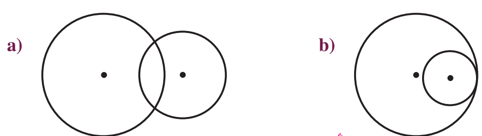
أرسمُ القطعةَ المستقيمةَ الواصلةَ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ، ثمَّ أرسمُ المماسّاتِ التي تقطعُها بلونٍ أحمرَ، والمماسّاتِ التي لا تقطعُها بلونٍ أزرقَ.



ألاحِظُ أنَّهُ يوجدُ للدائرتيْنِ مماسّانِ داخليانِ، وآخرانِ خارجيانِ.

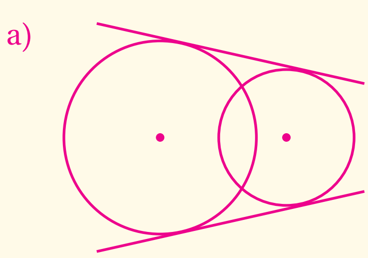
أتحقق من فهمي

كمْ مماسًّا مُشترَكًا يُمكِنُ رسمُهُ للدائرتيْنِ في الشكلِ الآتي؟ أرسمُ المماسّاتِ، ثمَّ أُصنِّفُها إلى خارجيةٍ وداخليةٍ.

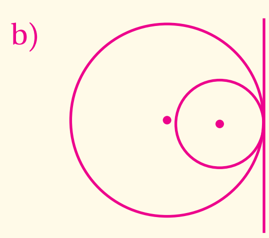


أنظر الهامش.

إجابة سؤال التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 1):



مماسان خارجيان.

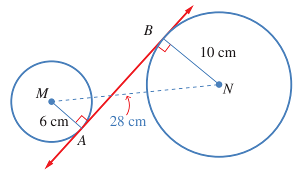


مماس واحد خارجي.

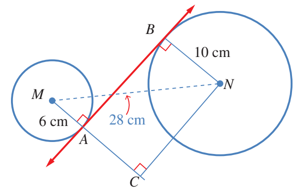
يُمكِنُ حسابُ طولِ المماسِّ المشتركِ (المسافةُ بينَ نقطتَي التَّماسِّ على الدائرتيْنِ) بطريقةٍ مُماثِلةٍ لحسابِ طولِ المماسِّ المرسومِ منْ نقطةٍ خارجَ الدائرةِ إلى نقطةٍ عليْها.

مثال 2

أَجِدُ طولَ $\overline{AB}$ في الشكلِ المجاورِ.



أمدُّ $\overline{MA}$ على استقامتِهِ، ثمَّ أرسمُ منْ N عمودًا على امتدادِ $\overline{MA}$، ثمَّ أُسمّي نقطةَ تقاطعِ العمودِ معَها C.



أُفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ إيجادُ طولِ $\overline{AB}$ باستعمالِ تشابُهِ المثلَّثاتِ أيضًا؟

$m\angle NBA = m\angle BAC = 90^\circ$ المماسُّ عموديٌّ على نصفِ القُطْرِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ

$m\angle ACN = 90^\circ$ $\overline{NC}$ عموديٌّ على $\overline{MA}$

$m\angle BNC = 90^\circ$ مجموعُ قياساتِ زوايا الشكلِ الرباعيِّ 360°

إذنْ، الشكلُ الرباعيُّ $ACNB$ مستطيلٌ؛ لأنَّ زواياهُ الأربعَ قوائمُ.

$AB = NC$ ضلعانِ مُتقابِلانِ في المستطيلِ

والآنَ، أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورس على المثلثِ قائمِ الزاويةِ MCN لأَجِدَ CN:

$(CN)^2 = (MN)^2 - (MC)^2$ نظريةُ فيثاغورس

$= 28^2 - (6 + 10)^2$ بالتعويضِ

$(CN)^2 = 784 - 256 = 528$ بالتبسيطِ

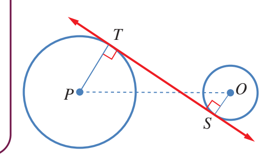
$CN = \sqrt{528} \approx 23$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

$AB = CN \approx 23\,\text{cm}$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ $\overline{ST}$ في الشكلِ المجاورِ، علمًا بأنَّ:

$PT = 12$ cm, $OS = 4$ cm, $PO = 34$ cm أنظر الهامش.



مثال 2

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 الذي يُبيِّن كيفية حساب طول مماس مشترك داخلي لدائرتين متباعدتين.
- أُناقِش الطلبة في الخطوات المتبعة، ثم أسألهم:
  - » هل توجد طريقة بديلة لإيجاد طول $\overline{AB}$ ؟

أخطاء مفاهيمية:

قد يُخطِئ بعض الطلبة في تطبيق نظرية فيثاغورس، وبخاصة عندما يكون الطول مجهولًا لأحد ضلعي الزاوية القائمة، وذلك بجمع مربعي الطولين المعلوميين بدلًا من طرحهما؛ لذا أُؤكِّد لهم أنَّ مربع طول الضلع الأطول (أي الوتر) في المثلث قائم الزاوية يساوي مجموع مربعي طولي ضلعي القائمة، وأنَّ مربع طول أحد ضلعي القائمة يساوي مربع طول الوتر ناقص مربع طول ضلع القائمة الثاني، ثم أُدرِّبهم على الاستعانة برسم مُبسَّط للمثلث توضع عليه عناصره المعلومة.

إرشاد: أُبيِّن للطلبة في تدريب بند (**أتحقَّق من فهمي**) في المثال 2 أنَّه يمكنهم مَدُّ $\overline{PT}$، ورسم عمود من O إلى امتداد $\overline{PT}$، ثم إكمال الحل بالطريقة نفسها.

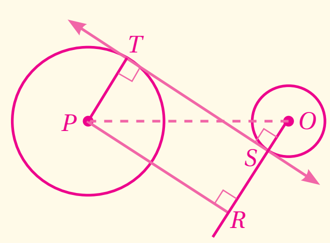
إجابة سؤال التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 2):

$(PO)^2 = (PR)^2 + (OR)^2$

$34^2 = (PR)^2 + 16^2 \Rightarrow (PR)^2 = 900$

$PR = 30$

إذن، طول $\overline{ST}$ هو 30 وحدة.

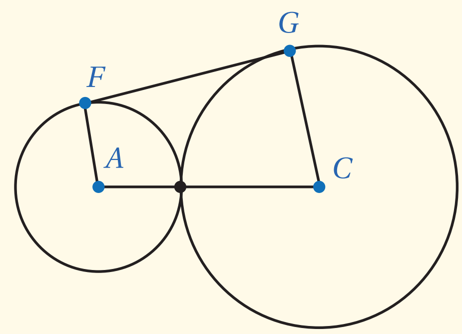


مثال 3: من الحياة

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يُبيِّن طريقة إيجاد طول مماس خارجي لدائرتين متباعدتين.
- أُناقِش الطلبة في الخطوات المتبعة.

مثال إضافي:

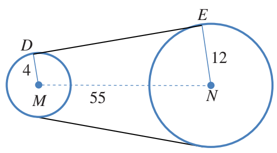
- فـي الشـكل التالي، $\overline{FG}$ ممـاس مشـترك لدائرتين متماسـتين مـن الخـارج. إذا كان $FG = 60$ cm، و $AC = 65$ cm، فما طول $\overline{GC}$ ؟ 45 cm



مثال 3: من الحياة

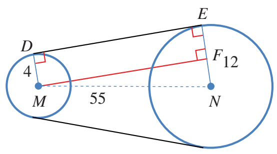
دراجاتٌ: تلتـفُّ في درّاجةٍ هوائيةٍ سلسـلةٌ معدنيةٌ على عجلتيْنِ مُسنَّنتيْنِ دائريتيْنِ، نصفُ قُطْرِ الصغرى 4 cm، ونصفُ قُطْرِ الكبرى 12 cm، والمسافةُ بيْنَ مركزيْهِما 55 cm. أجِدُ طولَ السلسـلةِ بينَ نقطتَيْ تماسِّها معَ المُسنَّنتيْنِ.

لركوبِ الدرّاجـةِ الهوائيةِ فوائدُ صحيةٌ وبيئيةٌ كثيـرةٌ، منها: تقويةُ عضلاتِ الجسـمِ، والتقليلُ منَ التلـوُّثِ الناجمِ عنِ اسـتعمالِ وسائلِ النقلِ التقليديةِ.



المطلوبُ هوَ حسابُ طولِ $\overline{DE}$.

أرسـمُ منْ M عمودًا علـى $\overline{NE}$، ثمَّ أُسـمّي نقطةَ تقاطعِهِ معَها F كما في الشكلِ المجاورِ.



$m\angle NED = m\angle MDE = 90°$	المماسُّ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ
$m\angle MFE = 90°$	$\overline{MF}$ عموديٌّ على $\overline{NE}$
$m\angle DMF = 90°$	مجموعُ قياساتِ زوايا الشكلِ الرباعيِّ $360°$

إذنْ، الشكلُ الرباعيُّ $MDEF$ مستطيلٌ؛ لأنَّ زواياهُ الأربعَ قوائمُ.

والآنَ، أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورس على المثلثِ قائمِ الزاويةِ MFN لأجِدَ طولَ $\overline{MF}$:

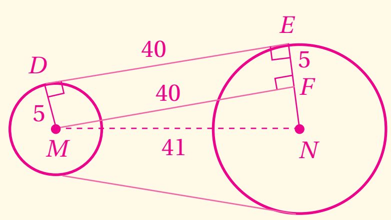
$(MF)^2 = (MN)^2 - (FN)^2$	نظريةُ فيثاغورس
$= 55^2 - (12-4)^2$	بالتعويضِ
$(MF)^2 = 3025 - 64 = 2961$	بالتبسيطِ
$MF = \sqrt{2961} = 54.4$	بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ
$DE = MF = 54.4$ cm	

أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ نصفِ قُطْرِ العجلةِ المُسـنَّنةِ الكبرى في درّاجةٍ، علمًا بأنَّ طولَ السلسـلةِ بينَ نقطتَيْ تماسِّها معَ المُسـنَّنتيْنِ 40 cm، وطولَ نصفِ قُطْرِ العجلةِ المُسنَّنةِ الصغرى 5 cm، والمسافةَ بيْنَ مركزَيِ العجلتيْنِ المُسنَّنتيْنِ 41 cm. أنظر الهامش.

إجابة سؤال التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 3):

أفترض أنَّ $NE = x$ cm، فيكون $FN = (x-5)$ cm



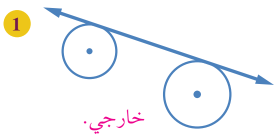
بتطبيق نظرية فيثاغورس في المثلث قائم الزاوية MFN، فإنَّ:

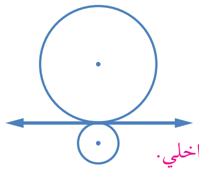
$$(x-5)^2 = 41^2 - 40^2 = 81$$
$$x - 5 = 9$$
$$x = 14$$

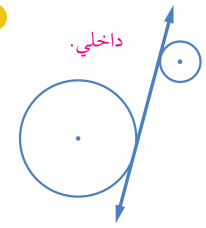
إذن، طول نصف قُطْر العجلة الكبرى هو: 14 cm

أتدرب وأحل المسائل

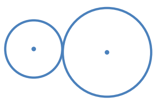
أُحدِّدُ إذا كانَ المماسُّ داخليًّا أمْ خارجيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

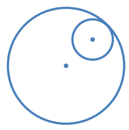
1 
خارجي.

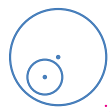
2 
داخلي.

3 
داخلي.

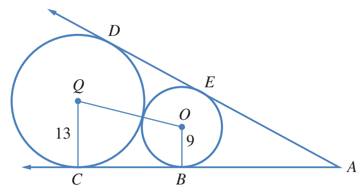
كمْ مماسًّا مشتركًا يُمكِنُ رسمُهُ لكلٍّ منْ أزواجِ الدوائرِ الآتيةِ؟ أرسمُها، ثمَّ أُصنِّفُها إلى خارجيةٍ وداخليةٍ.

4 
أنظر الهامش.

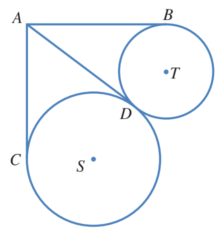
5 
أنظر الهامش.

6 
صفر.

7 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ مماسَّيْنِ منَ النقطةِ A لدائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ. أَجِدُ طولَ $\overline{CB}$ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ. أنظر ملحق الإجابات.

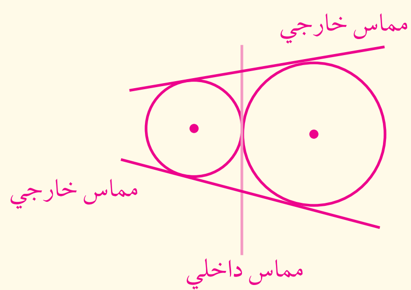


8 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ، والمماسّاتِ: $\overline{AB}$، وَ $\overline{AC}$، وَ $\overline{AD}$. إذا كانَ $AC = 2x + 5$ ، وَ $AB = 3x - 2$، فما قيمةُ x؟ أنظر الهامش.

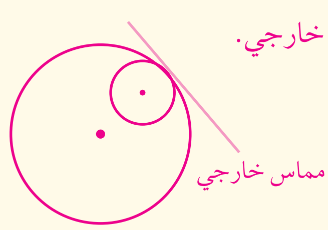


إجابات الأسئلة:

4) مماسان خارجيان، ومماس داخلي.



5) مماس خارجي.



8)

مماسان مرسومان من النقطة A للدائرة التي مركزها T

مماسان مرسومان من النقطة A للدائرة التي مركزها S

$AB = AD$

$AC = AD$

$AB = AC$

$3x - 2 = 2x + 5$

$x = 7$

4 التدريب

أتدرَّب وأحلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (7 – 1)، ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (14 – 13).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 8, 9 كتاب التمارين: (1–4)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (20 – 25) كتاب التمارين: 4, 5
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (11 – 14) كتاب التمارين: 6, 7

تنويع التعليم:

للتوسُّع في السؤال 7، أطلب إلى الطلبة إيجاد طول $\overline{AB}$.

سيبحث الطلبة عن مثلثين متشابهين، ثم يكتبون التناسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة، ثم يجدون طول $\overline{AB}$.
$AB = 48.6$

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:

» إذا كان طول مماس مشترك داخلي لدائرتين هو 45 وحدة، والمسافة بين مركزيهما 51 وحدة، وطول قُطْر إحدى الدائرتين 18 وحدة، فما طول قُطْر الدائرة الأخرى؟ 30 وحدة.

تعليمات المشروع:

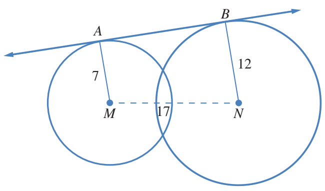
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيَّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكُّد أنَّ عناصر المشروع جميعها موجودة يوم العرض.

6 الختام

- أطلب إلى الطلبة رسم دائرتين متماستين من الخارج، طولا نصفي قُطْريهما 4 cm، و 2 cm، وهما تمسان دائرة ثالثة من الداخل، طول قُطْرها 12 وحدة.

---

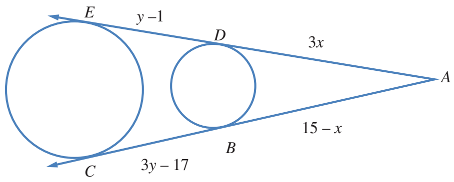
9 أَجِدُ طولَ $\overline{AB}$ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ.
أنظر ملحق الإجابات.



10 **حزامٌ ناقلٌ:** يمرُّ حزامٌ حولَ دولابيْنِ دائريَّيْنِ، نصفُ قُطْرِ الصغيرِ منْهُما 15 cm، ونصفُ قُطْرِ الكبيرِ 25 cm. إذا كانَ طولُ الحزامِ بينَ نقطتَيِ التَّماسِّ معَ الدولابيْنِ 2 m، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ الدولابيْنِ؟ أنظر ملحق الإجابات.

11 أُحدِّدُ وضعَ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما إذا كانَتْ معادلتاهُما: $x^2 + y^2 = 25$ ، $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$.
أنظر ملحق الإجابات.

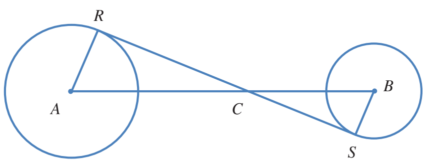
12 أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منَ x وَ y في الشكلِ المجاورِ.
أنظر ملحق الإجابات.



مهارات التفكير العليا

13 **تحدٍّ:** يُمثِّلُ الشكلانِ الآتيانِ طريقتيْنِ لرسمِ دائرةٍ تُلامِسُ كلًّا منَ الدائرةِ الزرقاءِ، والخضراءِ، والحمراءِ.
أَجِدُ 6 طرائقَ أُخرى لرسمِ هذهِ الدائرةِ. أنظر ملحق الإجابات.

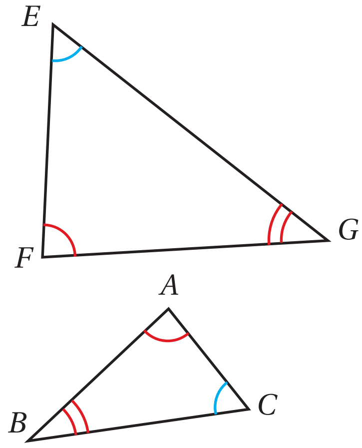
14 **برهانٌ:** تُمثِّلُ $\overline{RS}$ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا داخليًّا مشتركًا لدائرتيْنِ مركزاهُما A، وَ B على التوالي. أُثبِتُ أنَّ: $\frac{RC}{SC} = \frac{AC}{BC}$.
أنظر ملحق الإجابات.



إرشاد:

لحل سؤال 14 (برهان)، أُوجِّه الطلبة إلى ترتيب رؤوس المثلثين المتشابهين بصورة صحيحة؛ لأهمية ذلك عند كتابة تناسب أطوال الأضلاع. ففي المثلثين المتشابهين المجاورين، أكتب الجملة الآتية:

- المثلث ABC يشابه المثلث FGE؛ لأنَّ الزاوية A تطابق الزاوية F، والزاوية B تطابق الزاوية G، والزاوية C تطابق الزاوية E.
- ثم أكتب تناسب أطوال الأضلاع وَفق الترتيب الصحيح: $\frac{AB}{FG} = \frac{AC}{FE} = \frac{BC}{GE}$.

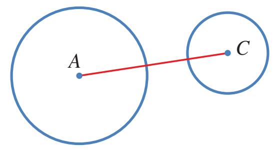


معملُ برمجيةِ جيوجبرا

توسعٌ: الدوائرُ المتماسةُ
Extension: Tangent Circles

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra) لرسمِ دائرتيْنِ، أنصافُ أقطارِهِما مُحدَّدةٌ، وإيجادِ البُعْدِ بينَ مركزيهما.

نشاط 1 أرسمُ الشكلَ الآتيَ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أَجِدُ AC.



الخطوةُ 1: أختارُ أيقونةَ Circle: Center & Radius منْ شريطِ الأدواتِ.

الخطوةُ 2: أنقرُ زرَّ الفأرةِ الأيسرَ معَ السحبِ لرسمِ دائرةٍ مركزُها A. ستظهرُ معادلةُ الدائرةِ بالصورةِ القياسيةِ في شريطِ الإدخالِ، وسيظهرُ مركزُها على شكلِ زوجٍ مرتبٍ.

الخطوةُ 3: أُكرِّرُ الخطوتيْنِ (1) وَ(2) لرسمِ دائرةٍ مركزُها C، وإيجادِ نصفِ قُطْرِها.

الخطوةُ 4: لأَجِدَ البُعْدَ بينَ مركزِ كلٍّ منَ الدائرتيْنِ، أختارُ Segment منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ على المركزِ A، ثمَّ المركزِ C، وأقرأُ البُعْدَ بينَ المركزيْنِ منْ شريطِ الإدخالِ.

يُمكِنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لاستكشافِ العلاقةِ بينَ نصفَيْ قُطْرَيِ الدائرتيْنِ، وموقعِ كلٍّ منْهُما بالنسبةِ إلى الأُخرى.

نشاط 2

1. أرسمُ كلًّا من الدوائرِ المُبيَّنةِ في الجدولِ الآتي باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.
2. إذا كانَ طولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ الكبيرةِ r_1، وطولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ الصغيرةِ r_2، فأستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لأُكمِلَ الجدولَ الآتيَ.

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

هدف النشاط:

- استعمال برمجية جيوجبرا لاستكشاف العلاقة بين نصفي قُطري الدائرتين، وموقع كلٍّ منهما بالنسبة إلى الأخرى.

المصادر والأدوات:

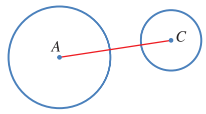
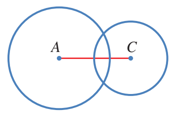
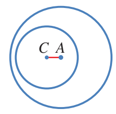
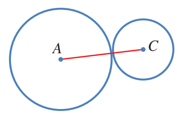
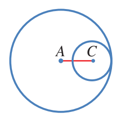
- برمجية جيوجبرا.

خطوات العمل:

- أُرافِق الطلبة إلى مختبر الحاسوب في المدرسة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات ثلاثية على الأكثر، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة فتح برمجية جيوجبرا من الموقع: https://www.geogebra.org/geometry في أجهزة الحاسوب.
- أطلب إلى أفراد كل مجموعة رسم دائرة طول نصف قُطْرها 3 وحدات، ثم رسم دائرة مركزها معلوم، وتمر بنقطة معلومة، ثم إيجاد طول نصف قُطْرها.
- أتجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا.
- أُوجِّه كل طالب إلى رسم دائرتين متباعدتين ودائرتين متماستين في دفتره.
- أطلب إلى أحد الطلبة رسم إجابته على اللوح، ثم أسأل زملاءه:
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  - » أرسمها (يرسم أكثر من طالب إجابته على اللوح).
- أُوضِّح للطلبة الحالات الممكنة لدائرتين في مستوى.

- أُوضِّح للطلبة كيف يُنفَّذ النشــاط 1، ثم أطلب إليهم تنفيذه ضمن مجموعات، وأتأكَّد أنَّ أفراد كل مجموعة يمكنهم تنفيذ النشاط.
- أسأل الطلبة:
  - » بماذا توصَف هاتان الدائرتان؟ متباعدتان.
  - » ما علاقة المســافة بين مركزيهمــا وطول نصفي قُطْريهما؟ المسافة بين مركزيهما أكبر من مجموع طولي نصفي قُطْريهما.
  - » إذا كان طولا نصفي قُطْري دائرتين 5 cm, 9 cm، وكانــت الدائرتان متماســتين من الخــارج، فما المسافة بين مركزيهما؟ 14 cm
  - » إذا كان طولا نصفي قُطْري دائرتين 8 cm, 13 cm، وكانتا الدائرتان متماستين من الداخل، فما المسافة بين مركزيهما؟ 5 cm
  - » إذا كان طولا نصفي قُطْري دائرتين 7 cm, 15 cm، وكانتــا الدائرتــان متقاطعتيــن، فما المســافة بين مركزيهما؟ أيُّ عدد أكبر من 8، وأقل من 22
- أُوزِّع على الطلبة **ورقة المصادر 2: الدوائر المتماسة**، ثم أطلــب إليهم تنفيذ النشــاط 2، ومــلء الجدول باستعمال برمجية جيوجبرا.
- أسأل الطلبة عن علاقة المسافة بين المركزين وطولي نصفي القُطْرين في كل حالة.
- أطلب إلى الطلبة وصف أوضاع الدوائر في الحالات الخمس.
- أطلب إلى الطلبة الإجابة عن الأسئلة (4–1) في بند (أتــدرَّب)، وأُتابِعهم في هذه الأثناء، وألفت انتباههم إلى أنَّه يمكنهم التحقُّق من إجاباتهم باستعمال برمجية جيوجبرا.

3 أُقارنُ بينَ قيمِ r_1+r_2، r_2، وَ r_1-r_2 وَ AC، ثمَّ أستنتجُ العلاقةَ بينَها وبينَ وضعِ الدائرتَيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهما.

وضعُ الدائرتَيْنِ	r_1	r_2	AC	r_1-r_2	r_1+r_2	الاستنتاجُ
						
						
						
						
						

أتدرب

أُحدِّدُ وضعَ الدائرتَيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهما في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ دونَ رسمِهِما:

1 $r_1=9,\ r_2=5,\ AC=3$ واحدة داخل الأخرى.

2 $r_1=11,\ r_2=5,\ AC=6$ متماستان من الداخل.

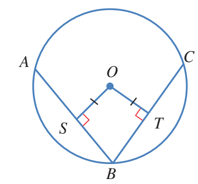
3 $r_1=6,\ r_2=3,\ AC=17$ متباعدتان.

4 $r_1=8,\ r_2=5,\ AC=3$ متماستان من الداخل.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

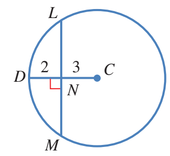
أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 $\overline{AB}$ وَ $\overline{CB}$ في الشكلِ الآتي وترانِ في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ $AS = 4$ cm، وَ $OT = 3$ cm، فـإنَّ طولَ $\overline{BC}$ بالسنتيمتراتِ هوَ:



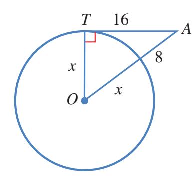
a) 6 b) 7
c) 8 d) 10

2 اعتمادًا على الشكلِ الآتي، فإنَّ طولَ $\overline{LM}$ هوَ:



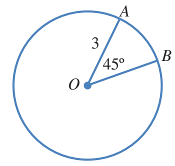
a) 5 b) 8
c) 10 d) 13

3 اعتمادًا على الشكلِ الآتي، فإنَّ طولَ نصفِ قُطرِ الدائرةِ هوَ:



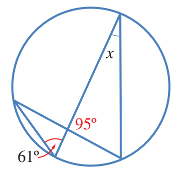
a) 5.75 b) 12
c) 4 d) 8

4 طولُ القوسِ الأصغرِ $\widehat{AB}$ بدلالةِ π في الشـكلِ الآتي هوَ:



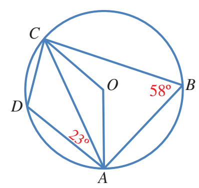
a) $\frac{9\pi}{8}$ b) $\frac{3\pi}{2}$
c) $\frac{9\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{4}$

5 قيمةُ x في الشكلِ الآتي هيَ:



a) 61° b) 24°
c) 34° d) 95°

6 قياسُ الزاويةِ DCA في الشكلِ الآتي هوَ:



a) 55° a) 41°
b) 35° c) 45°

73

اختبار نهاية الوحدة

- أُراجِع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- أُوزِّع الطلبـــة إلى مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأسـئلة، ثـم عرض إجابتهم أمام أفراد المجموعات الأخرى.
- أختار جزءًا من الأسـئلة ليحلها الطلبة واجبًا منزليًّا، وأُناقِشهم فيها في اليوم التالي.

ملاحظاتي

7 النقطةُ التي لا تقعُ على الدائرةِ التي معادلتُها $(x+2)^2+(y-4)^2=25$ هيَ:

a) $(-2,-1)$ b) $(1,8)$
c) $(3,4)$ d) $(0,5)$

8 عددُ المماسّاتِ المشتركةِ التي يُمكِنُ رسمُها لدائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الداخلِ هوَ:

a) 3 b) 2
c) 1 d) 0

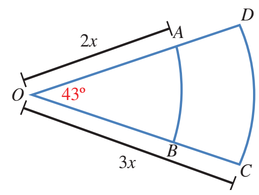
9 أكتبُ معادلةَ الدائرةِ التي تُمثِّلُ النقطتانِ $A(4,-3)$، وَ $B(6,9)$ طرفا قُطْرٍ فيها.

$(x-5)^2+(y-3)^2=37$

يُمثِّلُ الشكلُ التالي قطاعيْنِ دائريَّيْنِ منْ دائرتيْنِ لهُما المركزُ نفسُهُ O. إذا كانَ نصفُ قُطْرِ الدائرةِ الصغرى $2x$، ونصفُ قُطْرِ الدائرةِ الكبرى $3x$، وقياسُ الزاويةِ AOB هوَ $43°$، ومساحةُ المنطقةِ $ABCD$ هيَ $30\ cm^2$، فأَجِدُ:

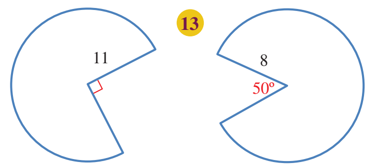
10 قيمةَ x. أنظر الهامش.

11 الفرقَ بينَ طولَيِ القوسيْنِ CD، وَ AB.
أنظر الهامش.



أَجِدُ المساحةَ والمحيطَ لكلٍّ منَ القطاعيْنِ الآتييْنِ:

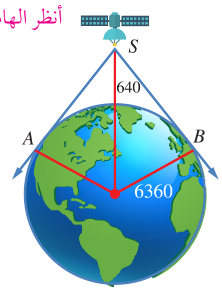
12 **13**



$A=285.1$; $L=73.8$ $A=173.1$; $L=59.3$

14 **أقمارٌ صناعيةٌ:** يرتفعُ قمرٌ صناعيٌّ مسافةَ 640 km عنْ سطحِ الأرضِ التي نصفُ قُطْرِها 6360 km، ويُمكِنُ منْهُ مشاهدةُ المنطقةِ الواقعةِ بينَ المماسَّيْنِ $\overrightarrow{SB}$ وَ $\overrightarrow{SA}$ منْ سطحِ الأرضِ. ما المسافةُ بينَ القمرِ الصناعيِّ وأبعدِ نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدتُها منْهُ على سطحِ الأرضِ؟

أنظر الهامش.



15 **حزامٌ مطّاطيٌّ:** يدورُ حزامٌ مطّاطيٌّ حولَ بكرتيْنِ دائريتيْنِ، طولُ نصفَيْ قُطْرَيْهِما 8 cm، وَ 3 cm على التوالي. إذا كانَ طولُ الحزامِ بينَ نقطتَيِ التّماسِّ معَ البكرتيْنِ 25 cm، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ البكرتيْنِ؟
أنظر ملحق الإجابات.

إجابات الأسئلة:

10) $A=\frac{43}{360}\times 9x^2\times\pi-\frac{43}{360}\times 4x^2\times\pi=30$

$$\frac{43}{360}\times x^2\times\pi(9-4)=30$$

$$x^2=\frac{30\times 360}{43\times 5\pi}$$

$$x^2\approx 16\Rightarrow x\approx 4\ cm$$

11) الفرق بين طولي القوسين CD ، و AB هو:

$$\frac{43}{360}\times 6x\times\pi-\frac{43}{360}\times 4x\times\pi=\frac{43}{360}\times 2x\times\pi$$

$$\approx\frac{43}{360}\times 2\times 4\times\pi\approx 3\ cm$$

14) المسافة بين القمر الصناعي وأبعد نقطة يمكن مشاهدتها منه على سطح الأرض هي SA :

$$(SA)^2=(640+6360)^2-6360^2$$
$$=7000^2-6360^2$$
$$=8550400$$
$$SA\approx 2924\ km$$

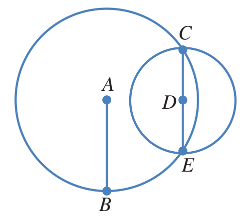
تدريب على الاختبارات الدولية

- أعرّف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبيّن لهم أهميتها، ثم أوجّههم إلى حل الأسـئلة في بنـد **(تدريب على الاختبارات الدولية)** فرديًّا، ثم أناقشـهم في إجاباتها على اللوح.
- أحفّز الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة ومثيلاتها، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدّيـة، وأحرص على تضمين اختباراتي المدرسـية نماذج مماثلة لهذه الأسئلة.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

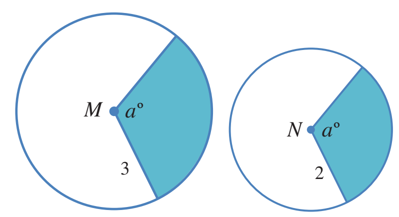
16 تتقاطـعُ دائرتـانِ مركزاهُمـا A, D فـي النقطتيْـنِ E وَ C. إذا كانَ $AB = EC = 10\ \text{cm}$، فمـا طولُ $\overline{AD}$ بالسنتيمتراتِ؟



a) $5\sqrt{2}$ b) $10\sqrt{3}$

c) $10\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{3}$

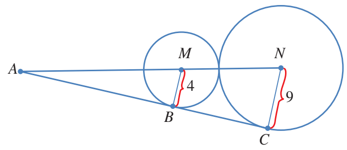
17 النقطتانِ N وَ M هما مركزا الدائرتيْنِ في الشكلِ الآتي. إذا كانَتْ مسـاحةُ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الدائرةِ الكبرى 9 وحداتٍ مربَّعةٍ، فما مسـاحةُ المنطقـةِ المُظلَّلةِ في الدائرةِ الصغرى بالوحداتِ المربَّعةِ؟



a) 3 b) 4

c) 5 d) 7

18 يُمثِّلُ الشكلُ الآتي دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ، رُسِمَ لهُما مماسٌّ مشتركٌ منَ النقطةِ A الواقعةِ على المستقيمِ المارِّ بالمركزيْنِ N وَ M. إذا كانَ نصفا قُطْرَيِ الدائرتيْنِ 4 وحداتٍ وَ 9 وحداتٍ، فأيُّ العباراتِ التاليةِ صحيحةٌ:



a) طولُ $\overline{AN}$ يساوي طولَ $\overline{AC}$.

b) طولُ $\overline{BC}$ يساوي 13 وحدةً.

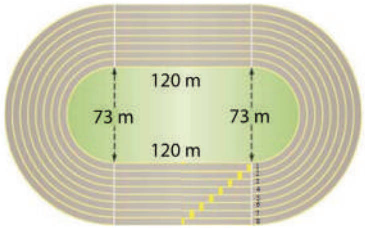
c) $AC = \frac{9}{4} AB$.

d) $AC = \frac{4}{9} AB$.

19 أَجِدُ طولَ $\overline{AM}$ في السؤالِ السابقِ مُبيِّنًا خطواتِ الحَلِّ.

أنظر ملحق الإجابات.

20 يُمثِّلُ الشكلُ الآتي مضمارًا للجري منْ ثمانيةِ مساربَ، كلٌّ منْها يتكوَّنُ منْ جزأيْنِ مستقيميْنِ متوازييْنِ، ونصفَيْ دائرتيْـنِ متصلتيْـنِ بهِما. إذا كانَ عرضُ كلِّ مسـربٍ 1 m، فبكمْ يزيـدُ طولُ الحدِّ الداخليِّ منَ المسـربِ الثالثِ على طولِ الحدِّ الداخليِّ منَ المسربِ الأولِ؟



أنظر ملحق الإجابات.

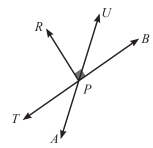
إرشـاد: في السؤال 18، أُذكِّر الطلبة بحالات تشـابه المثلثات، وعلاقة أضلاع كلٍّ من المثلثين الناتجة من حالة التشابه.

كتاب التمارين

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمثالِ المعطى.

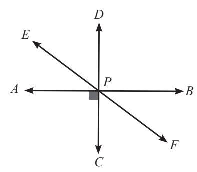
العلاقاتُ بَيْنَ الزّوايا (الدرسُ 1)

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أُسَمّي:



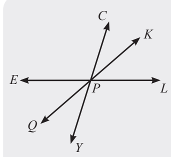
1. زاويتَينِ متقابلتَينِ بالرّأسِ. $\angle BPU, \angle APT$
2. زاويتَينِ متكاملتَينِ. $\angle APT, \angle BPA$
3. زاويتَينِ متجاورتَينِ. $\angle BPA, \angle UPB$
4. زاويتَينِ متتامّتَينِ. $\angle YPR, \angle BPU$

اعتمادًا على الشّكلِ المجاورِ، أسمّي:



5. زاويتَينِ متقابلتَينِ بالرّأسِ. $\angle BPF, \angle DPE$
6. زاويتَينِ متجاورتَينِ. $\angle CPF, \angle BPF$
7. زاويتَينِ متكاملتَينِ. $\angle APD, \angle BPD$
8. زاويتَينِ متتامّتَينِ. $\angle EPD, \angle APA$

مثالٌ: اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أُسَمّي:



a) زاويتَينِ متقابلتَينِ بالرّأسِ:

$\angle CPK, \angle QPY$؛ لأنَّهُما نَتَجَتا منْ تقاطعِ المستقيمينِ $\overleftrightarrow{QK}, \overleftrightarrow{CY}$

b) زاويتَينِ متكاملتَينِ:

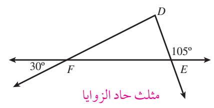
$\angle CPE, \angle CPL$؛ لأنَّ مجموعَ قياسَيْهِما $180°$، وهما تشكِّلانِ زاويةً مستقيمةً.

c) زاويتَينِ متجاورتَينِ:

$\angle KPL, \angle LPY$؛ لأنَّ لهُما رأسًا مشترَكًا (P)، وضلعًا مشترَكًا $\overrightarrow{PL}$، ولا تَتَداخلانِ.

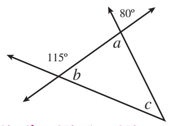
إيجادُ قياساتِ زوايا مجهولةٍ باستعمالِ العلاقاتِ بينَ الزوايا (الدرسُ 1)

9. ما نوعُ المثلثِ DEF في الشكلِ الآتي؟ أبرّرُ إجابتي.



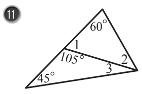
مثلث حاد الزوايا

10. أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ: a، وَ b، وَ c في الشكلِ الآتي:

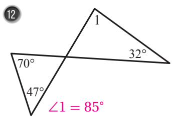


$\angle a = 80°, \angle b = 65°, \angle c = 35°$

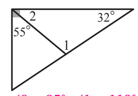
أجدُ قياساتِ الزوايا المرقَّمةِ في كلٍّ منَ الأشكالِ الآتيةِ:

11. 

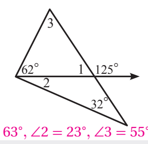
$\angle 3 = 30°, \angle 2 = 45°, \angle 1 = 75°$

12. 

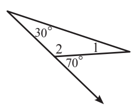
$\angle 1 = 85°$

13. 

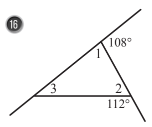
$\angle 2 = 35°, \angle 1 = 113°$

14. 

$\angle 1 = 63°, \angle 2 = 23°, \angle 3 = 55°$

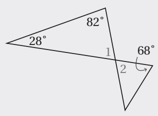
15. 

$\angle 2 = 110°, \angle 1 = 40°$

16. 

$\angle 3 = 40°, \angle 2 = 68°, \angle 1 = 72°$

مثالٌ: أجدُ قياسَ كلٍّ مِنَ الزّاويتَينِ 1 وَ 2 في الشكلِ المجاورِ.



الخطوةُ 1 أجدُ $m\angle 1$

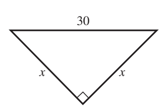
مجموعُ قياساتِ زوايا المثلثِ	$m\angle 1 + 28° + 82° = 180°$
أجمعُ	$m\angle 1 + 110° = 180°$
أطرحُ $110°$ مِنْ كلا الطرفَينِ	$m\angle 1 = 70°$

الخطوةُ 2 أجدُ $m\angle 2$

بما أنَّ $\angle 1$ و $\angle 2$ متقابلتانِ بالرأسِ، إذنْ $m\angle 2 = 70°$

نظريةُ فيثاغورس (الدرسُ 1)

17. أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ المجاورِ، وأقرّبُ إجابتي إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ:

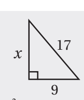


$x = \frac{30}{\sqrt{2}}$

18. **نجارةٌ:** صنعَ فيصلٌ بابًا لمزرعتِهِ مستطيلَ الشكلِ، وقدْ بلغَ عرضُهُ 1.2 m وارتفاعُهُ 2.5 m، ثمَّ أرادَ تدعيمَ البابِ بوضعِ قطعةٍ خشبيةٍ رفيعةٍ تمتدُّ بينَ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ فيهِ. ما طولُ هذهِ القطعةِ الإضافيةِ؟

$\sqrt{7.69}$

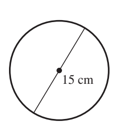
مثالٌ: أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ المجاورِ، وأقرّبُ إجابتي إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ:



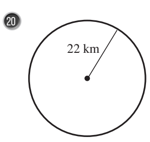
نظريةُ فيثاغورس	$x^2 = 17^2 - 9^2$
بالتبسيطِ	$= 289 - 81$
بالتبسيطِ	$= 208$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ	$x = \sqrt{208} = 14.4222$
بالتقريبِ إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ	≈ 14.4

محيطُ الدائرةِ ومساحتها (الدرسُ 2)

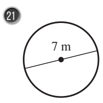
أجدُ محيطَ كلِّ دائرةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أجدُ مِساحتَها. أُقرِّبُ إجابَتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ:

19. 

47.1

20. 

138.2

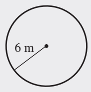
21. 

22

كتاب التمارين

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

مثالٌ: أجدُ محيطَ الدائرةِ المرسومةِ جانبًا، ثمَّ أجدُ مساحتها. أُقرِّبُ إجابَتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ:



$C = 2\pi r$ صيغةُ محيطِ الدائرةِ

$\approx 2 \times 3.14 \times 6$ أُعوِّضُ $\pi \approx 3.14$ و $r = 6$

≈ 37.7 أجدُ الناتجَ

إذنْ، محيطُ الدائرةِ يُساوي 37.7 m تقريبًا.

$A = \pi r^2$ صيغةُ مِساحةِ الدائرةِ

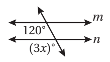
$\approx 3.14 \times 6^2$ أُعوِّضُ $\pi \approx 3.14$ و $r = 6$

≈ 113 أجدُ الناتجَ

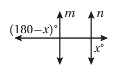
إذنْ، مِساحةُ الدائرةِ تُساوي $113\ m^2$ تقريبًا.

المستقيماتُ المتوازيةُ وأزواجُ الزّوايا (الدرسُ 3)

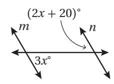
أجدُ قيمةَ x إذا كانَ $m \parallel n$ في كلٍّ ممّا يأتي:

22 

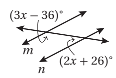
$x = 40$

23 

$x = 90$

24 

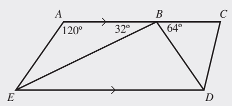
$x = 20$

25 

$x = 38$

مثالٌ: إذا كانَ $AC \parallel ED$، فأَجِدُ قياسَ الزوايا الآتيةِ:

EBD, AEB, DEB

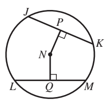


$m\angle EBD = 180° - 32° - 64° = 84°$ مجموعُ الزوايا المتجاورةِ على مستقيمٍ هوَ 180°

$m\angle AEB = 180° - 32° - 120° = 28°$ مجموعُ قياسِ زوايا المثلثِ ABE هوَ 180°

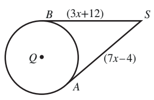
$m\angle DEB = m\angle ABE = 32°$ زاويتانِ داخليتانِ متبادلتانِ

الدرسُ 1
أوتارُ الدائرةِ، وأقطارُها، ومماسّاتُها
Chords, Diameters and Tangents of a Circle



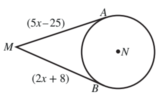
يُمثِّلُ N مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ $JK = LM = 24\ cm$، وكانَ $NP = 9\ cm$، فأَجِدُ:

1. طولَ $\overline{NQ}$. 9 cm (الوتران المتطابقان يبعدان المسافة نفسها عن مركز الدائرة)
2. طولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ. 15 cm



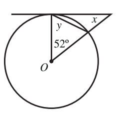
$\overline{SB}$، وَ $\overline{SA}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها Q. إذا كانَ طولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ 10 cm، فأَجِدُ:

3. قيمةَ x. $x = 4\ cm$
4. طولَ $\overline{QS}$. $QS = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{676} = 26\ cm$



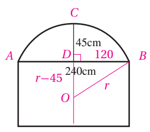
$\overline{MB}$، وَ$\overline{MA}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها N. إذا كانَ $MN = 34\ cm$، فأَجِدُ:

5. قيمةَ x. $x = 11\ cm$
6. طولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ. $r = \sqrt{34^2 - 30^2} = \sqrt{256} = 16$



7. يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ مماسًّا لدائرةٍ مركزُها O. أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ x، وَ y.
$x = 38°;\ y = 64°$

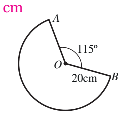
نافذةٌ على شكلِ مستطيلٍ طولُها 240 cm، يعلو المستطيلَ قوسٌ منْ دائرةٍ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ ارتفاعُ منتصفِ القوسِ عنْ منتصفِ الضلعِ العلويِّ منَ المستطيلِ 45 cm، فأَجِدُ:



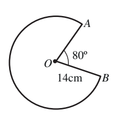
8. طولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ التي كانَ القوسُ جزءًا منْها.
العمود $\overline{CD}$ المار بمنتصف الوتر $\overline{AB}$ يمر بالمركز O.
فإذا كان نصف القُطْر يساوي r فإنَّ بُعْد المركز عن الوتر $\overline{AB}$ يساوي $r - 45$
بحسب نظرية فيثاغورس، فإنَّ:
$$r^2 = 120^2 + (r - 45)^2$$
$$90r = 120^2 + 45^2 = 16425$$
$$\Rightarrow r = 182.5\ cm$$

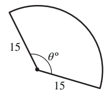
الدرسُ 2
الأقواسُ والقطاعاتُ الدائريةُ
Arcs and Sectors

1. أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ إذا كانَ قياسُ زاويةِ القطاعِ 120°، وطولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ 21 cm.
$\ell = 14\pi \approx 44.0\ cm\ ;\ A = 147\pi \approx 461.8\ cm^2$
2. أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ إذا كانَ قياسُ زاويةِ القطاعِ 135°، وطولُ قُطْرِ الدائرةِ 14 cm.
$\ell = 5.25\pi \approx 16.5\ cm\ ;\ A = 18.375\pi \approx 57.7\ cm^2$
3. إذا كانَتْ مساحةُ قطاعٍ دائريٍّ $35\ cm^2$، وكانَ قياسُ زاويةِ القطاعِ 72°، فما طولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ؟
$r \approx 7.5\ cm$
4. إذا كانَتْ مساحةُ قطاعٍ دائريٍّ $60\ cm^2$، وكانَ قياسُ زاويةِ القطاعِ 45°، فما طولُ قُطْرِ الدائرةِ؟ $d \approx 24.7\ cm$
5. أَجِدُ محيطَ القطاعِ الدائريِّ الآتي.
$L \approx 125.5\ cm$

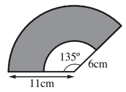


6. أَجِدُ محيطَ القطاعِ الدائريِّ الآتي.
$L \approx 96.4\ cm$





7. إذا كانَتْ مساحةُ القطاعِ الدائريِّ المجاورِ $200\ cm^2$، فما قيمةُ θ؟
$\theta \approx 101.9°$

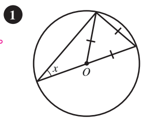


8. أَجِدُ مساحةَ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الشكلِ المجاورِ.
$100.1\ cm^2$
9. **علومٌ:** وُضِعَتْ كرةٌ طولُ قُطْرِها 15cm على بُعْدٍ أفقيٍّ يساوي x منْ عينِ آلاءَ. إذا كانَ طولُ خطِّ البصرِ الواصلِ بينَ مركزِ العينِ وأبعدِ نقطةٍ على الكرةِ يُمكِنُ أنْ تراها آلاءُ هوَ 40cm، فما قيمةُ x؟
أنظر ملحق الإجابات.

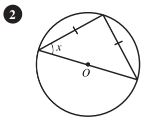
كتاب التمارين

الدرسُ 3
الزوايا في الدائرةِ
Angles in a Circle

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ، فما قيمةُ x في كلٍّ منَ الشكليْنِ الآتييْنِ؟

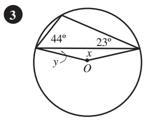
1 

$x = 30°$

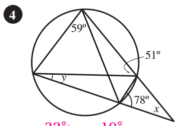
2 

$x = 45°$

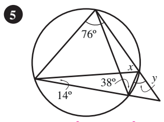
أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في ما يأتي (أفترضُ أنَّ O هيَ مركزُ الدائرةِ):

3 

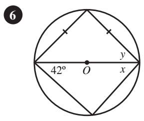
$x = 134°; y = 23°$

4 

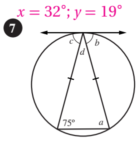
$x = 32°; y = 19°$

5 

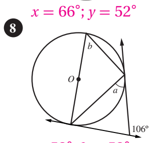
$x = 66°; y = 52°$

6 

$x = 48°; y = 45°$

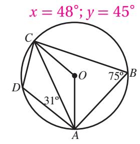
7 

$a = b = c = 75°; d = 30°$

8 

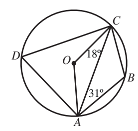
$a = 53°; b = 53°$

9 تقعُ النقاطُ: A، وَB، وَC، وَ D على دائرةٍ مركزُها O. اعتمادًا على القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ، أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ OCA، وَ DCA .



$m\angle OCA = 15°; m\angle DCA = 44°$

10 تقعُ النقاطُ: A، وَB، وَC، وَ D على دائرةٍ مركزُها O. اعتمادًا على القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ، أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ OAC، وَ BCA .



$m\angle BCA = 41°; m\angle OAC = 18°$

الدرسُ 4
معادلةُ الدائرةِ
Equation of a Circle

أكتبُ بالصورةِ القياسيةِ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

1 دائرةٌ مركزُها النقطةُ $(2, -4)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 6 وحداتٍ. $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$

2 دائرةٌ مركزُها النقطةُ $(-3, -1)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 4 وحداتٍ. $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 16$

3 دائرةٌ مركزُها النقطةُ $(2, 0)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(5, 10)$. $(x-2)^2 + y^2 = 109$

4 دائرةٌ مركزُها النقطةُ $(7, 3)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(3, -1)$. $(x-7)^2 + (y-3)^2 = 32$

5 دائرةٌ تُمثِّلُ النقطتانِ $A(11, -4), B(5, 6)$ نهايتَيْ قُطْرٍ فيها. $(x-8)^2 + (y-1)^2 = 34$

6 دائرةٌ تُمثِّلُ النقطتانِ $S(4,12), T(6 , -8)$ نهايتَيْ قُطْرٍ فيها. $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 101$

أَجِدُ إحداثيَّي المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلِّ دائرةٍ في ما يأتي:

7 $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 169$ $(-6, 3); r = 13$

8 $3x^2 + 3y^2 + 12x - 36y - 72 = 0$ $(-2, 6); r = 8$

9 $x^2 + (y-7)^2 = 225$ $(0, 7); r = 15$

10 $2x^2 + 2y^2 - 20x - 16y + 10 = 0$ $(5, 4); r = 6$

11 أَجِدُ طولَ المماسِّ المرسومِ منَ النقطةِ $T(8,7)$، الذي يمسُّ الدائرةَ التي معادلتُها $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 41$.
أنظر ملحق الإجابات.

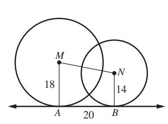
12 تُمثِّلُ النقاطُ: $A(-5, -2)$، وَ $B(7, -8)$، وَ $C(3, -16)$ مواقعَ 3 أبراجِ اتصالاتٍ. أَجِدُ موقعَ البرجِ الرابعِ الذي يبعدُ المسافةَ نفسَها عنِ الأبراجِ الثلاثةِ، ثمَّ أكتبُ معادلةَ الدائرةِ التي تقعُ عليْها الأبراجُ الثلاثةُ. أنظر ملحق الإجابات.

الدرسُ 5
الدوائرُ المتماسَّةُ
Tangent Circles

1 كمْ مماسًّا مشتركًا داخليًّا يُمكِنُ أنْ أرسمَ لدائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الداخلِ؟ صفر

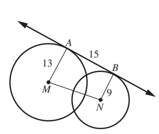
2 كمْ مماسًّا مشتركًا خارجيًّا يُمكِنُ أنْ أرسمَ لدائرتيْنِ متقاطعتيْنِ؟ 2

3 إذا كانَ $\overleftrightarrow{AB}$ مماسًّا مشتركًا للدائرتيْنِ في الشكلِ المجاورِ، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ؟



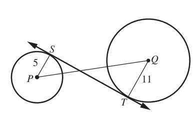
$(MN)^2 = 20^2 + 4^2 = 416$
$MN \approx 20.4$

4 إذا كانَ $\overleftrightarrow{AB}$ مماسًّا مشتركًا للدائرتيْنِ في الشكلِ المجاورِ، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ؟



$(MN)^2 = 15^2 + 4^2 = 241$
$MN \approx 15.5$

5 إذا كانَ $\overleftrightarrow{ST}$ مماسًّا مشتركًا للدائرتيْنِ في الشكلِ المجاورِ، وكانَ $PQ = 34$ cm، فما طولُ $\overleftrightarrow{ST}$؟



$(ST)^2 = 34^2 - 16^2 = 900$
$ST = 30$ cm

6 رُسِمَتْ دائرتانِ، الأولى مركزُها M، وطولُ نصفِ قُطْرِها 25 cm، والثانيةُ مركزُها N، وطولُ نصفِ قُطْرِها 36 cm، والمسافةُ بينَ مركزيْهِما 61 cm، ورُسِمَ لهُما مماسٌّ مشتركٌ، مَسَّ الصغرى في النقطةِ A، ومَسَّ الكبرى في النقطةِ B. ما نوعُ الشكلِ الرباعيِّ $AMNB$؟ ما أطوالُ أضلاعِهِ؟ أنظر ملحق الإجابات.

7 رُسِمَتْ دائرتانِ، الأولى مركزُها P، وطولُ نصفِ قُطْرِها 12 cm، والثانيةُ مركزُها Q، وطولُ نصفِ قُطْرِها 27 cm، والمسافةُ بينَ مركزيْهِما 39 cm، ورُسِمَ لهُما مماسٌّ مشتركٌ، مَسَّ الصغرى في النقطةِ R، ومَسَّ الكبرى في النقطةِ S. ما نوعُ الشكلِ الرباعيِّ $RPQS$؟ ما أطوالُ أضلاعِهِ؟ أنظر ملحق الإجابات.

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 1:

13) $OX = OY$ (نصفا قُطْرين في الدائرة).

$PO = PO$ (ضلع مشترك).

$m\angle PXO = m\angle PYO = 90°$ (المماس يعامد نصف القُطْر).

يتطابق المثلثان القائمان بضلع ووتر.

16) تُعيَّن نقطتان على حافة الطاولة، ويوصَل بينهما بقطعة مستقيمة، ثم يُستعمَل فرجار ومسطرة لرسم المنصف العمودي لهذه القطعة المستقيمة، ويُمَدُّ هذا العمود من الجهتين حتى يقطع حافة الطاولة في نقطتين تُسمَّيان C, D، ثم يُرسَم المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{CD}$، فتكون نقطة تقاطع هذا المنصف مع $\overline{CD}$ هي مركز الطاولة.

21) $\overline{NP}$ يعامد الوتر $\overline{AB}$؛ فهو ينصفه؛ أيْ إنَّ: $AP = 7$ cm

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث قائم الزاوية APN، فإنَّ:

$$(PN)^2 = (AN)^2 - (AP)^2$$
$$= 12^2 - 7^2 = 95$$
$$PN = \sqrt{95} \approx 9.75 \text{ cm}$$

وبتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث قائم الزاوية APO، فإنَّ:

$$OP \approx 16.58 \text{ cm}$$
$$ON = OP + PN \approx 26.33 \text{ cm}$$

22) وصل O بـ A, D، فينتج مثلثان قائما الزاوية OMA, OND فيهما:

$OA = OD$ (نصفا قُطْرين في الدائرة).

$$m\angle OND = m\angle OMA = 90°$$

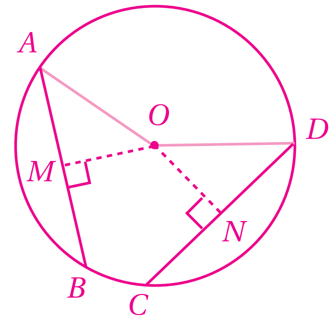
$ND = \frac{1}{2} DC$ (العمود المرسوم من مركز الدائرة إلى وتر فيها ينصفه).

$AM = \frac{1}{2} AB$ (العمود المرسوم من مركز الدائرة إلى وتر فيها ينصفه).

$ND = AM$ (لأنَّ $CD = AB$).

فيتطابق المثلثان القائمان بضلع ووتر، وتكون عناصرهما المتناظرة متطابقة.

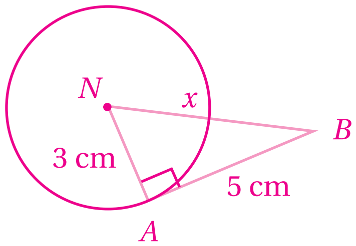
إذن، $ON = OM$؛ أيْ إنَّ الوترين AB, CD يبعدان المسافة نفسها عن المركز O.



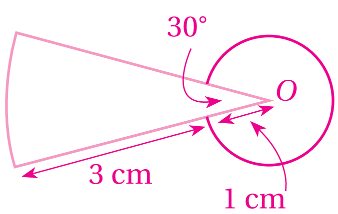
23) رسم شكل، وافتراض أنَّ $BN = x$

قول سارة غير صحيح؛ لأنَّ BN هو وتر في المثلث قائم الزاوية ABN. وبذلك، فإنَّ:

$$(BN)^2 = (AB)^2 + (AN)^2$$
$$x^2 = 25 + 9 = 34$$
$$x = \sqrt{34} \approx 5.8 \text{ cm}$$



إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 2:



18) يتكوَّن هذا الشكل من قطاعين دائريين، مركزهما O، وطول نصف قُطْر الأوَّل هو 1 cm، وطول نصف قُطْر الثاني هو 4 cm، ومحيطه P يساوي مجموع قوسي القطاعين إضافةً إلى طولي قطعتين مستقيمتين، طول كلٍّ منهما هو 3 cm؛ أيْ إنَّ:

$$P = \frac{330°}{360°} \times 2\pi + \frac{30°}{360°} \times 8\pi + 2 \times 3 \approx 13.85 \text{ cm}$$

ومساحة الشكل تساوي مجموع مساحتي القطاعين الدائريين:

$$A = \frac{330°}{360°} \times \pi + \frac{30°}{360°} \times 16\pi \approx 7.07 \text{ cm}^2$$

20) مساحة الجزء المظلل تساوي مساحة المثلث ABC مطروحًا منها مساحة القطاع الدائري APQ

مساحة المثلث هي: $\frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ cm²

(لأنَّ قاعدته 6، وارتفاعه $\sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$).

مساحة القطاع الدائري APQ تساوي: $\frac{60}{360} \times 3^2 \times \pi = 1.5\pi$ cm²

(لأنَّ نصف قُطْر الدائرة 3، وزاوية القطاع 60°).

مساحة الجزء المظلل هي: $9\sqrt{3} - 1.5\pi \approx 10.9$ cm²

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 3:

21) بافتراض أنَّ $m\angle AED = x$ ، فإنَّ $m\angle ABC = x$ ؛ لأنَّهما زاويتان متقابلتان في متوازي أضلاع، ولكن $m\angle ADC + m\angle ABC = 180°$ ؛ لأنَّ ABC، و ADC زاويتان متقابلتان في رباعي دائري.

وأيضًا $m\angle ADE + m\angle ADC = 180°$ ؛ لأنَّهما تُكوِّنان زاوية مستقيمة.

إذن، $m\angle ADE + 180° - x = 180°$

أيْ إنَّ: $m\angle ADE = x$

إذن، $m\angle ADE = m\angle AED$

26) $m\angle ACB = m\angle BAY = 64°$

$m\angle ACX = 180° - m\angle ACB = 180° - 64° = 116°$

$m\angle CAX = 180° - (32° + 116°) = 32°$

$m\angle AXC = m\angle CAX = 32°$

إذن، المثلث ACX متطابق الضلعين؛ لأنَّ فيه زاويتين متطابقتين.

28) $m\angle AOP = 2x$

$m\angle APO = \frac{180° - 2x}{2} = 90° - x$

$m\angle APT = 90° - (90° - x) = 90° - 90° + x = x$

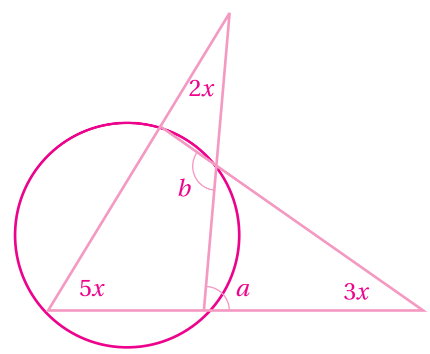
$m\angle APT = m\angle APB = x$

29) $a = 5x + 2x = 7x$

(زاوية خارجية بالنسبة إلى المثلث الكبير الأيسر).

$b = a + 3x$ (زاوية خارجية بالنسبة إلى المثلث الأيمن).

$= 7x + 3x = 10x$



الزاويتان اللتان قياس كلٍّ منهما $5x$, b هما زاويتان متقابلتان في مضلع رباعي دائري. إذن، مجموع قياسيهما هو $180°$

وبذلك، فإنَّ: $5x + b = 180°$

$5x + b = 180°$

$5x + 10x = 180°$

$15x = 180°$

$x = 12°$

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 4:

18) معادلة الدائرة التي تُمثِّل حدود المنطقة التي يصلها البث هي:

$(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 224^2$

بتعويض إحداثيات النقطة التي تُمثِّل موقع بيت عمر في المعادلة، فإنَّ:

$(-75 - 7)^2 + (95 - 4)^2 = 224^2$

$42928704 = 50176$

وهي عبارة غير صحيحة.

وبما أنَّ الطرف الأيسر أكبر من الطرف الأيمن، فإنَّ بيت عمر يقع خارج المنطقة التي يصلها البث.

19) $(2(x-2))^2 + (2(y+3))^2 = 100$

$4(x-2)^2 + 4(y+3)^2 = 100$

بالقسمة على 4 ، فإنَّ: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

المركز هو $(2, -3)$، وطول نصف القُطْر هو 5 وحدات.

20) بإكمال المربع، فإنَّ:

$(x + \frac{p}{2})^2 + (y+3)^2 = 96 + (\frac{p}{2})^2 + 9$

$r^2 = 96 + (\frac{p}{2})^2 + 9$

$11^2 = 105 + \frac{p^2}{4} \Rightarrow 121 - 105 = \frac{p^2}{4} \Rightarrow p^2 = 64 \Rightarrow p = 8$

إذن:

مركز الدائرة: $(-4, -3)$، وبُعْده عن نقطة الأصل: $\sqrt{16+9}$ ؛ أيْ 5 وحدات.

24) بتعويض $y = 3x - 2$ في معادلة الدائرة، فإنَّ:

$x^2 + (3x-2)^2 + 4x - 24(3x-2) + 108 = 0$

$x^2 + 9x^2 - 12x + 4 + 4x - 72x + 48 + 108 = 0$

$10x^2 - 80x + 160 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$

$(x - 4)^2 = 0 \Rightarrow x = 4$

$y = 3(4) - 2 = 10$

إذن، هذا المستقيم مماس للدائرة؛ لأنَّه يقطعها في نقطة واحدة فقط هي: $(4, 10)$.

26) نعم، قوله صحيح؛ فإذا حُوِّلت المعادلة إلى الصورة القياسية فإنَّ طرفها الأيمن يكون سالبًا، ولا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب.

$(x-7)^2 + (y+3)^2 = -59 + 49 + 9 \Rightarrow (x-7)^2 + (y+3)^2 = -1$

27) بما أنَّ الدائرة الصغرى تمس المحور x، فإنَّ طول نصف قُطْرها 3 وحدات، ومعادلتها هي:

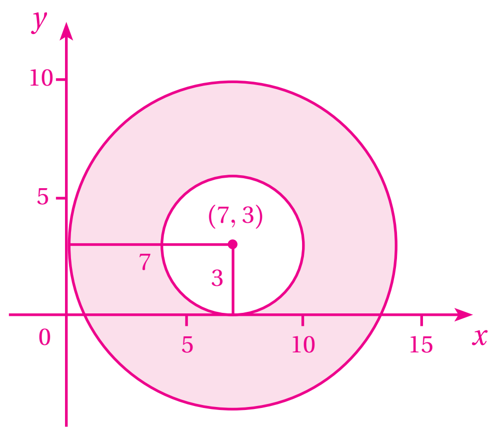
$(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 9$

وبما أنَّ الدائرة الكبرى تمس المحور y، فإنَّ طول نصف قُطْرها 7 وحدات، ومعادلتها هي:

$(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 49$

مساحة الممر تساوي الفرق بين مساحة الدائرة الكبرى ومساحة الدائرة الصغرى:

$A = 7^2 \times \pi - 3^2 \times \pi = 40\pi$



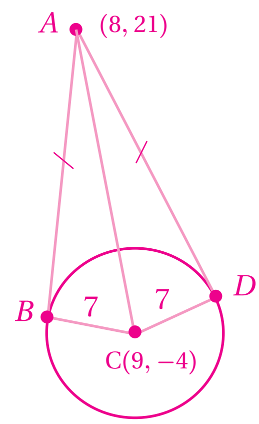
28) $(AB)^2 = (8-9)^2 + (21-(-4))^2 - 49 = 577$

$$AB = \sqrt{577} \approx 24$$

مساحة الشكل $ABCD$ تساوي مثلي مساحة المثلث قائم الزاوية ABC:

$$2 \times (\frac{1}{2} \times 24 \times 7) = 168$$

إذن، مساحة الشكل $ABCD$ هي 168 وحدة مربعة تقريبًا.



29) لتكن الصورة القياسية لهذه المعادلة هي: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = j^2$

بفك الأقواس، فإنَّ:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = j^2$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - j^2 = 0$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة المعطاة في السؤال، وهي:

$$x^2 + y^2 + 8x \ \ -10y \ \ + 24 = 0$$

فإنَّ: $8 = -2h\,;\ -10 = -2k\,;\ 24 = h^2 + k^2 - j^2$

أيْ إنَّ: $24 = (-4)^2 + 5^2 - j^2 \Rightarrow j^2 = 17\,;\ h = -4;\ \ k = 5$

إذن، الصورة القياسية لهذه المعادلة هي: $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 17$.

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 5:

7) يُرسَم العمود $\overline{OP}$ على $\overline{QC}$، فينتج المستطيل $OPCB$، والمثلث قائم الزاوية OPQ.

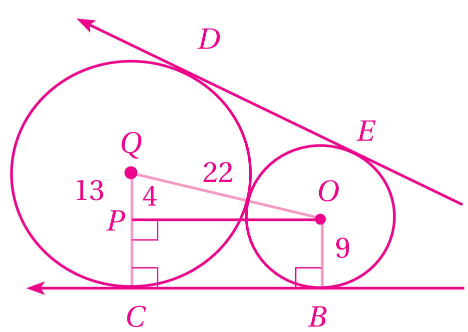
بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث OPQ، فإنَّ:

$$22^2 = 4^2 + (OP)^2$$

$$(OP)^2 = 22^2 - 4^2 = 468$$

$$OP \approx 21.6$$

$$CB = OP \approx 21.6$$



9) يُرسَم العمود $\overline{MC}$ على $\overline{NB}$، فينتج المستطيل $ABCM$، والمثلث قائم الزاوية MCN.

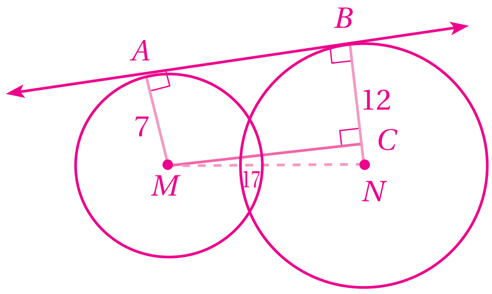
بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث MCN، فإنَّ:

$$17^2 = (MC)^2 + 5^2$$

$$(MC)^2 = 264$$

$$MC \approx 16.2$$

$$AB = MC \approx 16.2$$



10) يُرسَم شكل يُوضِّح المسألة.

لتكن النقطتان S، و T مركزي الدولابين، ولتكن A، و B نقطتي تماس الحزام مع الدولابين.

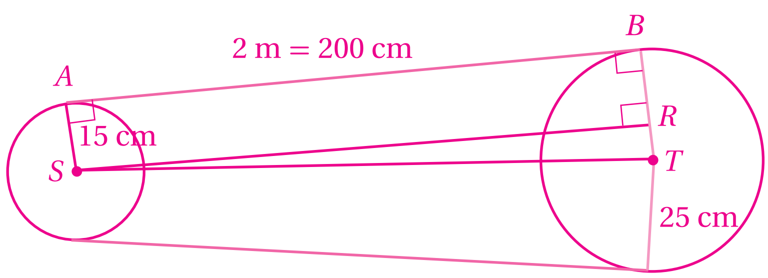
يُرسَم العمود $\overline{SR}$ على $\overline{TB}$، فينتج المستطيل $ABRS$، والمثلث قائم الزاوية SRT.

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث SRT، فإنَّ:

$$(ST)^2 = (SR)^2 + 10^2$$

$$(ST)^2 = 200^2 + 10^2 = 40100$$

$$ST \approx 200.2 \text{ cm}$$



11)

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 - 11 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$$

مركز هذه الدائرة هو $(3, -4)$، وطول نصف قُطْرها هو 6 وحدات،

ومركز الدائرة الثانية هو $(0, 0)$، وطول نصف قُطْرها هو 5 وحدات.

المسافة بين مركزيهما هي: $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

مجموع نصفي القُطْرين هو 11، والفرق بينهما هو 1

بما أنَّ $1 < 5 < 11$، فإنَّ الدائرتين متقاطعتان في نقطتين.

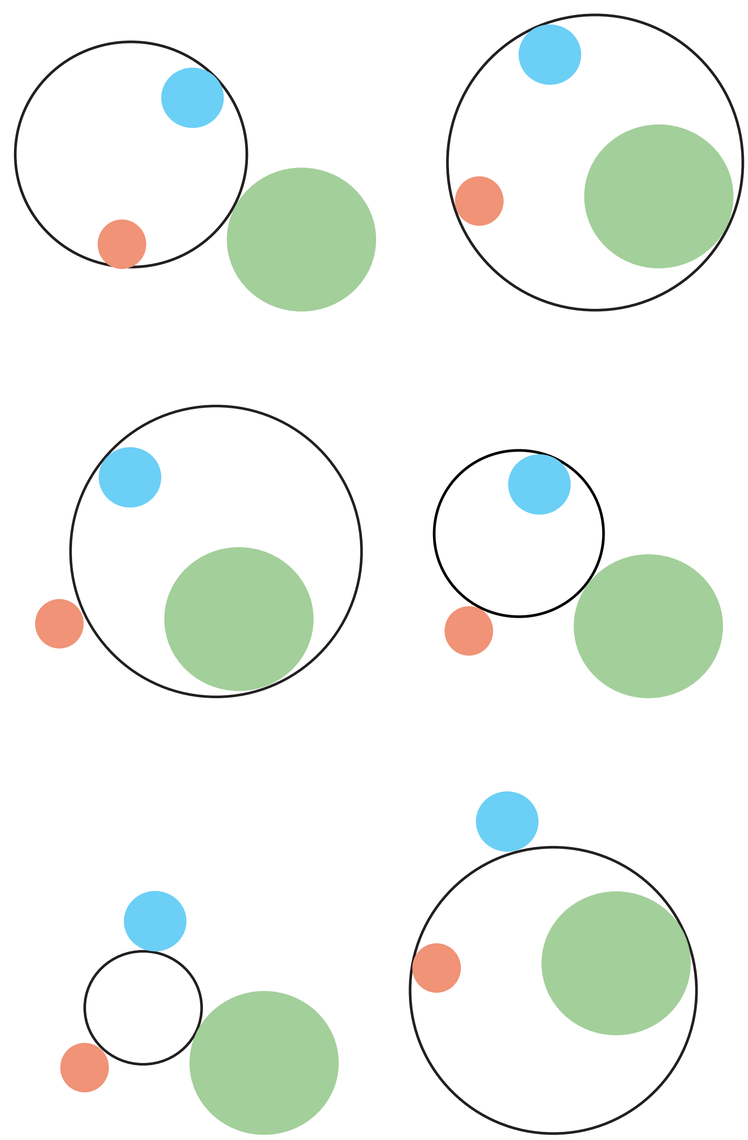
12) $AB = AD$ مماسان للدائرة الصغرى، مرسومان من النقطة A:

$$3x = 15 - x$$
$$4x = 15 \Rightarrow x = 3.75$$

$AE = AC$ مماسان للدائرة الكبرى، مرسومان من النقطة A:

$$3x + y - 1 = 15 - x + 3y - 17$$
$$2y = 4x + 1$$
$$2y = 15 + 1 = 16$$
$$y = 8$$

13) في ما يأتي الطرائق الست الأخرى لرسم دائرة تمس ثلاث دوائر متباعدة معطاة:



14) المثلثان BSC ، و ARC متشابهان؛ لأنَّ:

$m\angle RCA = m\angle SCB$ (زاويتان متقابلتان بالرأس).

$m\angle ARC = m\angle BSC = 90°$ (المماس يعامد نصف القُطْر المار بنقطة التماس).

إذن، يتشابه المثلثان ARC، و BSC؛ لأنَّ زاويتين في المثلث الأوَّل مطابقتان لزاويتين مناظرتين لهما في المثلث الثاني.

نتيجة لهذا التشابه؛ فإنَّ الأضلاع المتناظرة في المثلثين ARC تكون متناسبة؛ أيْ إنَّ:

$$\frac{AR}{BS} = \frac{RC}{SC} = \frac{AC}{BC}$$

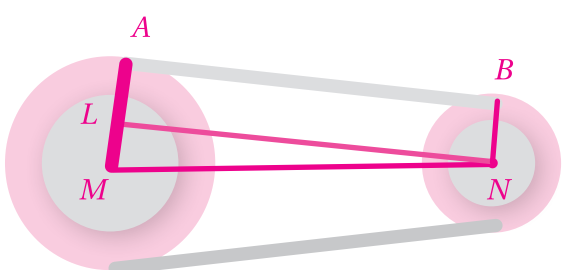
إذن، $\frac{RC}{SC} = \frac{AC}{BC}$

إجابات أسئلة اختبار نهاية الوحدة:

15) بافتراض أنَّ مركزي البكرتين هما: M، و N، وأنَّ نقطتي تماس الحزام مع البكرتين هما: A، و B، يُرسَم عمود من N إلى $\overline{AM}$ كما في الشكل الآتي.

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث قائم الزاوية MLN ، فإنَّ:

$$(MN)^2 = (NL)^2 + (ML)^2$$
$$= 25^2 + (8-3)^2 = 650$$
$$MN = \sqrt{650} \approx 25.5 \text{ cm}$$



19) المثلثان AMB، و ANC متشابهان؛ لأنَّ:

$m\angle ABM = m\angle ACN = 90°$ (المماس يعامد نصف القُطْر المار بنقطة التماس).

$m\angle BAM = m\angle CAN$ (زاوية مشتركة في المثلثين).

إذن، يتشابه المثلثان؛ لوجود زاويتين في المثلث الأوَّل مطابقتين لنظيرتيهما في المثلث الثاني.

نتيجة لذلك؛ فإنَّ الأضلاع المتناظرة في المثلثين تكون متناسبة؛ أيْ إنَّ:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN} = \frac{BM}{CN}$$

إذن، $\frac{AM}{AN} = \frac{BM}{CN}$

ولكن، $AN = AM + MN = AM + 13$ ،

بافتراض أنَّ $AM = x$

إذن، $\frac{x}{x + 13} = \frac{4}{9}$

$$9x = 4x + 4(13)$$
$$5x = 52 \Rightarrow x = 10.4$$

20) طول الحد الداخلي للمسرب الأول يساوي محيط نصفي دائرة قُطْرها 73 m مضافًا إليه طولا الجزأين المستقيمين من المسرب:

$$L_1 = 2(\frac{73\pi}{2}) + 2(120) = 240 + 73\pi \approx 469.3 \text{ m}$$

طول الحد الداخلي للمسرب الثالث يساوي محيط نصفي دائرة قُطْرها 77 m مضافًا إليه طولا الجزأين المستقيمين من المسرب:

$$L_3 = 2(\frac{77\pi}{2}) + 2(120) = 240 + 77\pi \approx 481.9 \text{ m}$$

$$L_3 - L_1 = 481.9 - 469.3 = 12.6 \text{ m}$$

إذن، يزيد الحد الداخلي للمسرب الثالث بنحو 12.6 m على الحد الداخلي للمسرب الأوَّل.

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 2:

9) خط بصر آلاء $\overrightarrow{AB}$ يُمثِّل مماسًا للكرة، وتُمثِّل الدائرة مقطعًا من الكرة يمر بمركزها.

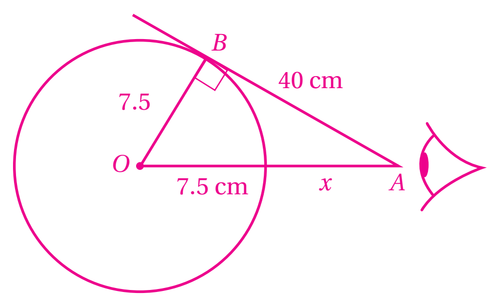
نصف قُطْر الدائرة يساوي نصف قُطْر الكرة، وهو 7.5 cm

بحسب نظرية فيثاغورس، فإنَّ:

$$(x + 7.5)^2 = 40^2 + 7.5^2 = 1656.25$$

$$x + 7.5 \approx 40.7$$

$$x \approx 33.2 \text{ cm}$$

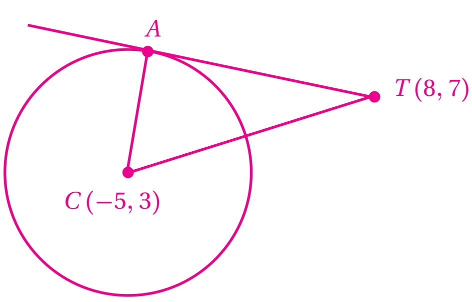


إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 4:

11)

$$(TA)^2 = \left((8-(-5))^2 + (7-3)^2\right) - 41 = 144$$

$$\Rightarrow TA = 12$$



12)

أفترض أنَّ موقع البرج الرابع هو (x, y)

إذن، $(x-3)^2 + (y+16)^2 = (x-7)^2 + (y+8)^2$

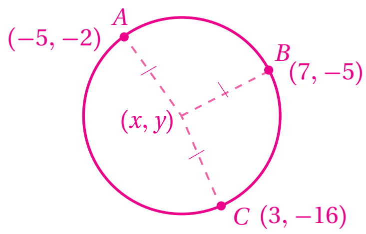
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 32y + 256 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 16y + 64$$

$$8x + 16y = -152 \Rightarrow x + 2y = -19 \text{ .... } (1)$$

وكذلك: $(x-3)^2 + (y+16)^2 = (x+5)^2 + (y+2)^2$ وبتبسيطها، فإنَّ:

$$-16x + 28y = -236 \Rightarrow -4x + 7y = -59 \text{ .... } (2)$$

وبحل المعادلتين 1 و 2 ، فإنَّ $x = -1; y = -9$. موقع البرج الرابع هو $(-1, -9)$. وهو مركز الدائرة، ومعادلتها هي: $(x+1)^2 + (y+9)^2 = 65$



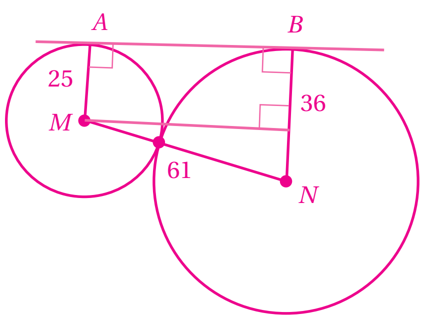
إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 5:

6) الدائرتان متماستان من الخارج؛ لأنَّ المسافة بين مركزيهما تساوي مجموع طولي نصفي قُطْريهما.

الشكل $AMNB$ شبه منحرف، فيه: $AM = 25$ cm; $BN = 36$ cm

و $MN = 61$ cm. أحسب طول الضلع الرابع كما يأتي:

$$(AB)^2 = 61^2 - 11^2 = 3600 \Rightarrow AB = 60 \text{ cm}$$



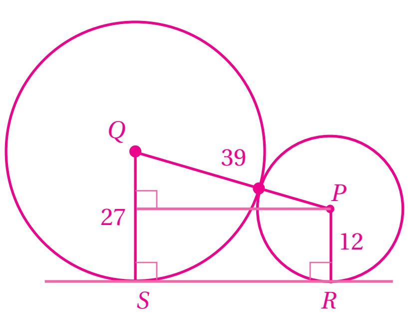
7) الدائرتان متماستان من الخارج؛ لأنَّ المسافة بين مركزيهما تساوي مجموع طولي نصفي قُطْريهما.

الشكل $RPQS$ شبه منحرف فيه: $RP = 12$cm

$PQ = 39$ cm، و $QS = 27$ cm

أحسب طول الضلع الرابع كما يأتي:

$$(SR)^2 = 39^2 - 15^2 = 1256 \Rightarrow SR = 36 \text{ cm}$$



الوحدة
3

حساب المثلثات
Trigonometry

www.nccd.gov.jo

الوحدة
3

مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
الدرس 1: النسب المثلثية.	• تعرُّف الوضع القياسي للزاوية، والقياس الموجب، والقياس السالب للزوايا. • رسم الزاوية ضمن دائرة الوحدة. • تحديد الزوايا الربعية، وقياس كل منها. • حساب النسب المثلثية الأساسية لزوايا يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة عند نقطة محددة. • استعمال المتطابقة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ في إيجاد باقي النسب المثلثية لزاوية إذا عُلِمت إحدى هذه النسب، وموقع ضلع انتهاء الزاوية.	ضلع الابتداء. ضلع الانتهاء. الوضع القياسي. دائرة الوحدة. الزاوية الربعية.	• المسطرة. • المنقلة. • الفرجار. • الآلة الحاسبة.	5
الدرس 2: النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة.	• استعمال النسب المثلثية للزوايا الخاصة وزاوية المرجع في حساب النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة. • استعمال الآلة الحاسبة وزاوية المرجع في حساب النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة. • استعمال معكوس النسبة المثلثية والآلة الحاسبة في إيجاد الزوايا ضمن الدورة الواحدة إذا عُلِمت النسبة المثلثية. • توظيف النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة في نمذجة مواقف حياتية.	الزاوية المرجعية. معكوس النسبة المثلثية.	• الآلة الحاسبة. • صندوق. • بطاقات.	3
الدرس 3: تمثيل الاقترانات المثلثية.	• تمثيل الاقترانات المثلثية الأساسية التي مجالها $[0°, 360°]$ بيانيًّا. • تعرُّف خصائص الاقترانات المثلثية الأساسية عن طريق تمثيلها البياني.		• برمجية جيوجبرا. • الآلة الحاسبة.	2
الدرس 4: حل المعادلات المثلثية.	• حل معادلة مثلثية تتضمَّن النسب المثلثية الأساسية حلًّا أوَّليًّا (مجموعة الحل ضمن الدورة الواحدة). • توظيف المعادلات المثلثية في نمذجة مواقف حياتية.	المعادلة المثلثية.	• الآلة الحاسبة.	3
عرض نتائج مشروع الوحدة.				1
اختبار نهاية الوحدة.				2
مجموع الحصص:				16 حصة

الوحدة 3


الوحدةُ 3

حسابُ المثلثاتِ
Trigonometry

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُعَدُّ دراسةُ العلاقاتِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ وقياساتِ زواياهُ (أوْ ما يُسمّى علمَ المثلثاتِ) أحدَ أهمِّ فروعِ الرياضياتِ وأقدمِها؛ إذْ ساعدَ هذا العلمُ قدماءَ المصريينَ على بناءِ الأهراماتِ ودراسةِ الفَلَكِ، وقدِ استمرَّ الاهتمامُ بهِ حتّى اليومِ؛ فكانَ أساسًا لكثيرٍ منَ العلومِ الأُخرى.

تعلَّمْتُ سابقًا:

✓ مفهومَ جيبِ الزاويةِ الحادَّةِ، وجيبَ تمامِها، وظلَّها بوصفِها نسبًا بينَ أضلاعِ المثلثِ قائمِ الزاويةِ.

✓ استخدامَ العلاقةِ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ في حَلِّ مسألةٍ عنْ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ.

✓ حَلَّ معادلاتٍ خطِّيةٍ وتربيعيةٍ ضمنَ مجموعةِ الأعدادِ الحقيقيةِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

◂ ماهيةَ دائرةِ الوحدةِ، ووضعَ الزاويةِ القياسيَّ.

◂ إيجادَ النسبِ المثلثيةِ للزوايا ضمنَ الدورةِ الواحدةِ.

◂ تمثيلَ الاقتراناتِ المثلثيةِ في المستوى الإحداثيِّ، واستنتاجَ خصائصِها.

◂ حَلَّ معادلاتٍ مثلثيةٍ، بحيثُ تكونُ مجموعةُ الحَلِّ ضمنَ الدورةِ الواحدةِ.

76

نظرة عامة على الوحدة:

تعلَّم الطلبة سابقًا النسب المثلثية الأساسية $(\sin x, \cos x, \tan x)$ في المثلث قائم الزاوية، واستعملوا المتطابقة الأساسية $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ في إيجاد النسب المثلثية الأساسية لزاوية حادة إذا عُلِمت إحدى هذه النسب، واستعملوا هذه النسب في نمذجة مواقف حياتية تتضمَّن الحسابات المتعلقة بزوايا الارتفاع والانخفاض. وهذه الوحدة هي امتداد لهذا التعلُّم، حيث يجد الطلبة النسب المثلثية الأساسية، ويحلّون معادلات مثلثية ضمن دورة واحدة؛ أيْ عندما تكون الزوايا بين $0°$ و $360°$، ويدرسون دائرة الوحدة، والوضع القياسي للزاوية، وزاوية المرجع، وعلاقة هذه المفاهيم بالنسب المثلثية، وتمثيل الاقترانات المثلثية في المستوى الإحداثي يدويًّا، وباستعمال برمجية جيوجبرا، وتحديد خصائص هذه الاقترانات؛ لأنَّها دورية، ويمكن توظيفها في مجموعة من المواقف الحياتية التي تُنمذَج باستعمالها.

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف التاسع

- تعرُّف النسب المثلثية الأساسية (الجيب، وجيب التمام، والظل) في المثلث قائم الزاوية.
- إيجاد قياس الزاوية الحادة إذا عُلِمت إحدى نسبها باستعمال الآلة الحاسبة.
- توظيف النسب المثلثية الأساسية لإيجاد قياسات مجهولة في المثلث.
- استنتاج المتطابقة المثلثية الأساسية $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$، واستعمالها لإيجاد النسب المثلثية الأساسية.

الصف العاشر

- تعرُّف دائرة الوحدة، وعلاقة إحداثيي نقطة تقاطع ضلع الانتهاء لزاوية في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة بنسبتي الجيب وجيب التمام للزاوية.
- إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا ضمن دورة واحدة: $0° \leq \theta \leq 360°$
- تمثيل الاقترانات المثلثية الأساسية بيانيًّا (يدويًّا، وباستعمال التكنولوجيا) ضمن دورة واحدة.
- حل معادلات مثلثية ضمن دورة واحدة: $0° \leq \theta \leq 360°$
- نمذجة مواقف حياتية باستعمال النسب والمعادلات المثلثية لإيجاد قياسات لزوايا وأضلاع مجهولة.

الصف الحادي عشر (العلمي)

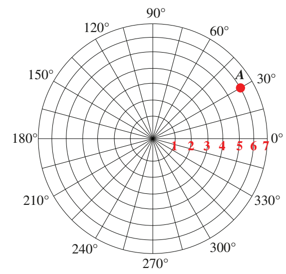
- التحويل بين قياسي الزاوية الدائري والستيني.
- تعرُّف الاقترانات (القاطع، وقاطع التمام، وظل تمام).
- تمثيل الاقترانات (القاطع، وقاطع التمام، وظل تمام) في المستوى الإحداثي.
- دراسة سلوك الاقتران المثلثي تحت تأثير تحويلات هندسية.
- تعرُّف المتطابقات المثلثية.
- إثبات صحة متطابقة مثلثية.
- إيجاد الحل العام لمعادلة مثلثية.

مشروعُ الوحدةِ

إنشاءُ نظامٍ إحداثيٍّ جديدٍ

فكرةُ المشروعِ إنشاءُ نظامٍ إحداثيٍّ جديدٍ، يعتمدُ البُعْدَ عنْ نقطةٍ مرجعيةٍ، وقياسَ زاويةِ الميلِ على الخطِّ الأفقيِّ.

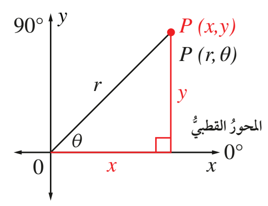
الموادُّ والأدواتُ أوراقٌ، مسطرةٌ، منقلةٌ، فرجارٌ، آلةٌ حاسبةٌ.



نظامُ الإحداثياتِ القطبيةِ: يُمكِنُ تحديدُ موقعِ أيِّ نقطةٍ في المستوى باستعمالِ الزوجِ المُرتَّبِ (r, θ)، حيثُ:

r: بُعْدُ النقطةِ عنْ نقطةٍ مرجعيةٍ تُسمّى القطبَ.

θ: الزاويةُ بينَ الشعاعِ المارِّ بالنقطةِ والقطبِ، والمحورِ القطبيِّ، وهوَ الشعاعُ الأفقيُّ منَ القطبِ باتجاهِ اليمينِ. يُلاحَظُ منَ الشكلِ المجاورِ أنَّ إحداثيَّيِ النقطةِ A هما: $(6, 30°)$. تُسمّى هذهِ الطريقةُ نظامَ الإحداثياتِ القطبيةِ.



تحويلُ الإحداثياتِ القطبيةِ إلى إحداثياتٍ ديكارتيةٍ: لتحويلِ الإحداثياتِ القطبيةِ إلى إحداثياتٍ ديكارتيةٍ، أرسمُ عمودًا منَ النقطةِ التي يُرادُ تحويلُ إحداثيَّيْها إلى المحورِ الأفقيِّ، ثمَّ أستعملُ النسبَ المثلثيةَ لحسابِ طولَيْ ضلعَيِ المثلثِ الناتجِ، كما في الشكلِ المجاورِ، للحصولِ على الإحداثيَّيْنِ x وَ y لتلكَ النقطةِ. للتحويلِ منَ النظامِ الديكارتيِّ إلى النظامِ القطبيِّ، أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ r وَ θ بطريقةٍ عكسيةٍ، وذلكَ باستعمالِ النسبِ المثلثيةِ.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أستعملُ مسطرةً وفرجارًا لرسمِ نسخةٍ مُكبَّرةٍ للمستوى القطبيِّ أعلاهُ، مُحدِّدًا عليْهِ مواقعَ 6 نقاطٍ تمثلُ رؤوسَ سُداسيٍّ منتظمٍ، ثمَّ أَجِدُ إحداثياتِها القطبيةِ (r, θ)، والديكارتيةِ (x, y).
2. أَصِلُ بينَ النقاطِ الستةِ بلونٍ مختلفٍ، ثمَّ أستعملُ قانونَ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ لإيجادِ محيطِ الشكلِ السداسيِّ.

عرضُ النتائجِ:

أُصمِّمُ معَ أفرادِ مجموعتي مجلةً أوْ لوحةً تتضمَّنُ ما يأتي:

- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ والرسومِ.
- وصفٌ لتطبيقٍ حياتيٍّ تُستعمَلُ فيهِ الإحداثياتُ القطبيةُ.

77

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	اختيار تطبيق علمي أو عملي مناسب لخصائص الدائرة.			
2	مشاركة أفراد المجموعة جميعًا بفاعلية في المشروع.			
3	التحقُّق من صحة النموذج والصور والرسوم التوضيحية، ودقة الحسابات الخاصة بها واكتمالها.			
4	اتصاف التقرير المكتوب بأنَّه كامل ومُنظَّم.			
5	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			
6	عرض معلومة جديدة تعلَّمها أفراد المجموعة في أثناء البحث والعمل في المشروع.			
7	وجود مقترح مناسب لتوسعة المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: إنشاء نظام إحداثي جديد.

هدف المشروع: إثراء معرفة الطلبة بأنظمة التمثيل في المستوى عن طريق إنشاء نظام يعتمد البُعْد عن نقطة مرجعية (القطب)، وقياس زاوية الميل عن المحور الأفقي، والتحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

خطوات تنفيذ المشروع

- أُعرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلُّم موضوعات الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أطلب إليهم دراسة نظام الإحداثيات القطبية من مشروع الوحدة في كتاب الطالب.
- أُعيِّن مُقرِّرًا لكل مجموعة، ثم أطلب إليه توزيع الأدوار على أفراد المجموعة.
- أذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، مثل: الأدوات الهندسية (المسطرة، والمنقلة، والفرجار)، وجهاز الحاسوب، وآلة التصوير، فضلًا عن بيان عناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع أوَّلًا بأوَّل وتعزيزه بالصور المناسبة للموضوع.
- أُبيِّن للطلبة أنَّ المطلوب من كل مجموعة ما يأتي:
  - » البحث في مصادر المعرفة المتاحة عن موضوع المشروع، بحيث يشمل تطبيقات عملية له، وإعداد تقرير عن نتائج البحث، وتسليمه نهاية الأسبوع الأوَّل من بدء دراسة الوحدة.
  - » تصميم لوحة من الكرتون وَفق خطوات تنفيذ المشروع تتضمَّن صورًا لمراحل التنفيذ.
  - » تصميم مُدوَّنة إلكترونية، أو منشور ورقي يتضمَّن وصف ما قامت به المجموعة ونقاشاتها المتعلقة بموضوع المشروع، وتلخيص النتائج التي توصَّلت إليها، إضافةً إلى تقرير يتضمَّن خطوات العمل التفصيلية، مثل: جدول للتحويل بين الإحداثيين، وتعيين النقاط في الإحداثي القطبي، والحسابات التي أوجدوها جميعها.
  - » عرض ما أنجزته المجموعة في مشروع الوحدة (يمكن استعمال برمجية العروض التقديمية (Power Point)، أو أيِّ طريقة أخرى يختارها الطلبة) بعد الانتهاء من دراسة الوحدة.

عرض النتائج

- ألفت انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، وإعداد عرض تقديمي، يحوي صورًا لمراحل التنفيذ، وأطلب إلى جميع أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوات في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، وتعزيز مهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- أطلب إليهم تسجيل تقييمهم الذاتي لمشروعهم، والاستعانة بأداة التقييم التالية في ذلك.
- أطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

الدرس 1

نتاجات الدرس

- تعرُّف الوضع القياسي للزاوية.
- تعرُّف دائرة الوحــدة، وربط النســب المثلثية بدائرة الوحدة، وإيجادها للزوايا الربعية.
- إيجاد النسبتين الأساسيتين المثلثتين الباقيتين في حال معرفة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- مفهوم الزاوية وعناصرها.
- استعمال المنقلة لقياس الزوايا.
- تعرُّف النسب المثلثية الأساسية في مثلث قائم الزاوية.
- استعمال النسب المثلثية لإيجاد قياسات مجهولة في المثلث.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطــة بما ســيُقدَّم من موضوعــات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أســتعد لدراسة الوحدة) في كتــاب التمارين، ثم أطلــب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلــى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أرسم على اللوح مجموعة من الزوايا (حادة، منفرجة، مستقيمة)، وأُذكِّر الطلبة بمفهوم الزاوية.
- أُذكِّر الطلبة بالنسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة، ثم أســألهم: ما أكبر قيمة لنسبة جيب الزاوية الحادة؟ ما أصغر قيمة؟ ثم أُكرِّر السؤال عن نسبة جيب التمام.

الدرس 1

النسبُ المثلثيةُ
Trigonometric Ratios

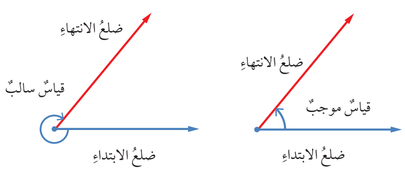
فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الوضعِ القياسيِّ للزاويةِ، وربطُ النسبِ المثلثيةِ بدائرةِ الوحدةِ، وإيجادُها للزوايا الربعيةِ، وإيجادُ النسبتيْنِ المثلثتيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ في حالِ معرفةِ إحدى النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ للزاويةِ.

المصطلحاتُ ضلعُ الابتداءِ، ضلعُ الانتهاءِ، الوضعُ القياسيُّ، دائرةُ الوحدةِ، الزاويةُ الربعيةُ.

مسألةُ اليومِ تعلَّمْتُ سابقًا إيجادَ النسبِ المثلثيةِ لزوايا حادَّةٍ، مثلِ النسبِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ قائمِ الزاويةِ. ولكنْ، كيفَ يُمكِنُ إيجادُ النسبِ المثلثيةِ لزاويةٍ أكبرَ منْ 90°، مثلِ الزاويةِ بينَ شفراتِ مروحةِ توليدِ الطاقةِ الكهربائيةِ؟

الزاويةُ هيَ اتحادُ شعاعيْنِ لهُما نقطةُ البدايةِ نفسُها. والنقطةُ المشتركةُ تُعرَفُ برأسِ الزاويةِ، أمّا الشعاعانِ فيُسمّى أحدُهُما **ضلعَ الابتداءِ** (initial side)، والآخرُ **ضلعَ الانتهاءِ** (terminal side). يوجدُ قياسانِ لأيِّ زاويةٍ؛ أحدُهُما موجبٌ عندما يدورُ ضلعُ الانتهاءِ عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ، والآخرُ سالبٌ حينَ يدورُ ضلعُ الانتهاءِ معَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ.

إرشادٌ
اتِّجاهُ حركةِ عقاربِ الساعةِ.
عكسُ حركةِ عقاربِ الساعةِ.



تكونُ الزاويةُ المرسومةُ في المستوى الإحداثيِّ في **الوضعِ القياسيِّ** (standard position) إذا كانَ رأسُها عندَ نقطةِ الأصلِ $(0, 0)$، وضلعُ ابتدائِها مُنطبِقًا على محورِ x الموجبِ.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**).
- أرسم على اللوح الزاوية بين شفرات مروحة توليد الطاقة الكهربائية بصورة تقريبية.
- أرسم مثلثًا يحوي زاوية قياسها 120، ثم أسأل الطلبة:
  » كيف يمكن إيجاد النسب المثلثية لهذه الزاوية؟
- أستمع لإجابات الطلبة، ثم أسألهم كل مرَّة:
  » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  » ما هذه الإجابة؟

3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة أنَّ الزاوية المرسومة في المستوى الإحداثي تكون بالوضع القياسي عند تحقُّق الشرطين الآتيين معًا: رأس الزاوية في نقطة الأصل، وضلع الابتداء لها منطبق على المحور x.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه لا علاقة لموضع ضلع الانتهاء للزاوية بكونها في الوضع القياسي أو غير ذلك، وأوضح لهم المقصود بالقياس الموجب (عكس اتجاه حركة عقارب الساعة)، والقياس السالب (اتجاه حركة عقارب الساعة) للزاوية.
- أطلب إلى الطلبة أنْ يُدوِّنوا في دفاترهم الشروط اللازمة التي تجعل الزاوية في الوضع القياسي.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أنْ أقول لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل أقول له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمَنْ يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، أو أقول له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 الذي يُوضِّح حالة لزاوية في الوضع غير القياسي، وحالة أخرى لزاوية في الوضع القياسي.
- أسأل الطلبة عن الشروط الواجب توافرها لتكون الزاوية في الوضع القياسي.
- أستمع لإجابات الطلبة، ثم أسألهم كل مرَّة:
  » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  » ما هذه الإجابة؟
- أسأل الطلبة عن تقدير قياس الزاوية في كل فرع، وكيف قدَّروا القياس.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

ملاحظاتي

أخطاء مفاهيمية:

قد يخلط بعض الطلبة بين ضلع الابتداء وضلع الانتهاء للزاوية؛ لذا أُؤكِّد لهم أنَّ ضلع الابتداء هو الضلع الذي نبدأ منه قياس الزاوية.

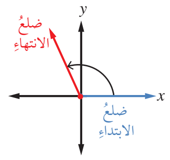
إرشادات:

- أستعمل لوحًا متحركًا (إنْ توافر) رُسِم عليه نظام المحاور الإحداثية المتعامدة عند تقديم الزوايا في الوضع القياسي.
- إذا توافر جهاز حاسوب وجهاز عرض، فيمكن توظيف برمجية جيوجبرا لرسم زوايا في الوضع القياسي، وتوضيح القراءة الموجبة والقراءة السالبة لقياسها.

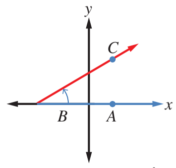
إجابة التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 1):

1) الزاوية في الوضع القياسي؛ لأنَّ رأسها في نقطة الأصل، وضلع الابتداء منطبق على المحور x.

2) الزاوية ليست في الوضع القياسي؛ لأنَّ ضلع الابتداء غير منطبق على المحور x.



زاويةٌ في الوضعِ القياسيِّ.

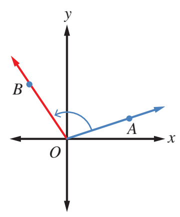


زاويةٌ ليست في الوضعِ القياسيِّ.

مثال 1

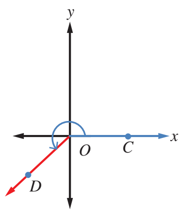
أُحدِّدُ إذا كانَتِ الزاويتانِ الآتيتانِ في وضعٍ قياسيٍّ أمْ لا، مُبيِّنًا السببَ:

1



الزاويةُ AOB ليسَتْ في وضعٍ قياسيٍّ؛ لأنَّ ضلعَ ابتدائِها لا ينطبقُ على محورِ x الموجبِ.

2

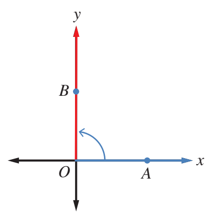


الزاويةُ COD في وضعٍ قياسيٍّ؛ لأنَّ ضلعَ ابتدائِها ينطبقُ على محورِ x الموجبِ، ورأسُها على نقطةِ الأصلِ O.

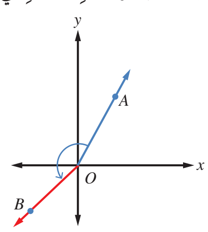
أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَتِ الزاويتانِ الآتيتانِ في وضعٍ قياسيٍّ أمْ لا، مُبيِّنًا السببَ: أنظر الهامش.

1



2



مثال 2

- أُوضِّح للطلبة مفهوم الدورة الكاملة، وأنَّه إذا دار ضلع انتهاء الزاوية عكس اتجاه حركة عقارب الساعة أكثر من دورة كاملة، فإنَّه تنتج زاوية ذات قراءة موجبة تكافئ زاوية يقع قياسها بين $0°$ و $360°$.
- أُناقِش على اللوح المثال 2 الذي يُبيِّن كيفية رسم زاوية في الوضع القياسي عندما يكون قياسها أقل من $360°$ أو أكبر منها.
- أُوضِّح للطلبة خطوات منظمة لرسم زاوية معطى قياسها في المستوى الإحداثي بالوضع القياسي للزاوية.
- أُؤكِّد للطلبة أنَّه إذا كان القياس المعطى للزاوية المراد رسمها بالوضع القياسي أكبر من $360°$، فإنَّنا نطرح مضاعفًا مناسبًا لقياس الدورة الواحدة الكاملة من القياس المعطى للحصول على قياس يقع بين $0°$ و $360°$، وعند رسم الزاوية يراعى عدد الدورات وَفق المضاعف المُحدَّد.
- أطلب إلى الطلبة في كل مرَّة تحديد الربع الذي رُسِم فيه ضلع الانتهاء.

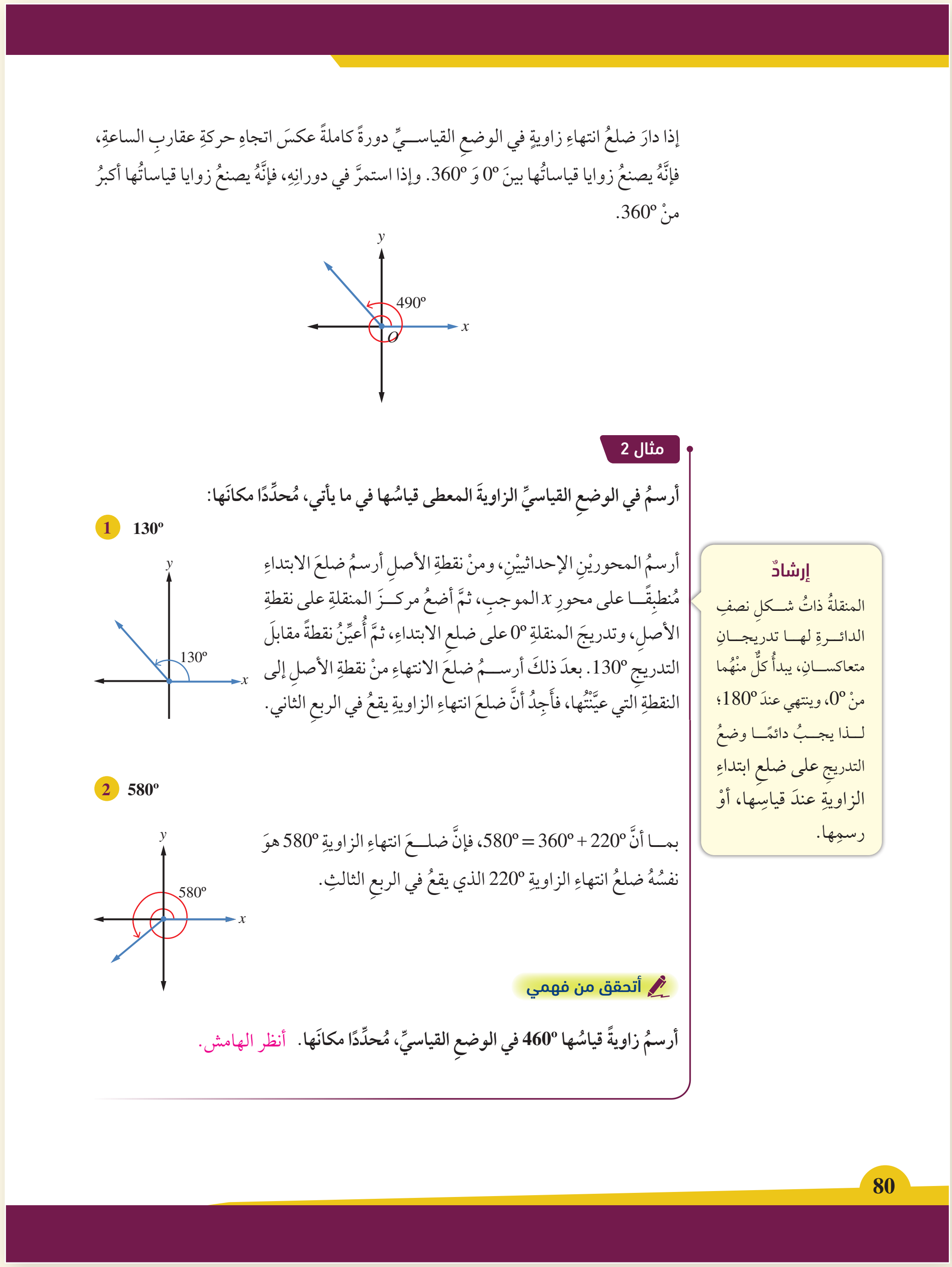
تنويع التعليم:

قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى المتوسط ودون المتوسط صعوبة في رسم الزوايا التي هي أكبر من $540°$، وأقل من $720°$، فيرسمون ضلع انتهائها في الربع الثاني؛ لذا أُنبِّههم إلى ضرورة وضع المنقلة بصورة صحيحة عند رسم الزاوية. يمكنني توزيع الطلبة الذين أتقنوا الرسم على المجموعات ليساعدوا زملاءهم.

مثال إضافي:

- أرسم الزوايا الآتية في الوضع القياسي:

1. $490°$
2. $560°$
3. $670°$



إذا دارَ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ في الوضعِ القياسيِّ دورةً كاملةً عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ، فإنَّهُ يصنعُ زوايا قياساتُها بينَ $0°$ وَ $360°$. وإذا استمرَّ في دورانِهِ، فإنَّهُ يصنعُ زوايا قياساتُها أكبرُ منْ $360°$.

مثال 2

أرسمُ في الوضعِ القياسيِّ الزاويةَ المعطى قياسُها في ما يأتي، مُحدِّدًا مكانَها:

1) $130°$

أرسمُ المحوريْنِ الإحداثييْنِ، ومنْ نقطةِ الأصلِ أرسمُ ضلعَ الابتداءِ مُنطبِقًا على محورِ x الموجبِ، ثمَّ أضعُ مركزَ المنقلةِ على نقطةِ الأصلِ، وتدريجَ المنقلةِ $0°$ على ضلعِ الابتداءِ، ثمَّ أُعيِّنُ نقطةً مقابلَ التدريجِ $130°$. بعدَ ذلكَ أرسمُ ضلعَ الانتهاءِ منْ نقطةِ الأصلِ إلى النقطةِ التي عيَّنْتُها، فأجِدُ أنَّ ضلعَ انتهاءِ الزاويةِ يقعُ في الربعِ الثاني.

2) $580°$

بما أنَّ $580° = 360° + 220°$، فإنَّ ضلعَ انتهاءِ الزاويةِ $580°$ هوَ نفسُهُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ $220°$ الذي يقعُ في الربعِ الثالثِ.

إرشادٌ

المنقلةُ ذاتُ شكلِ نصفِ الدائرةِ لها تدريجانِ متعاكسانِ، يبدأُ كلٌّ منْهُما منْ $0°$، وينتهي عندَ $180°$؛ لذا يجبُ دائمًا وضعُ التدريجِ على ضلعِ ابتداءِ الزاويةِ عندَ قياسِها، أوْ رسمِها.

أتحقق من فهمي

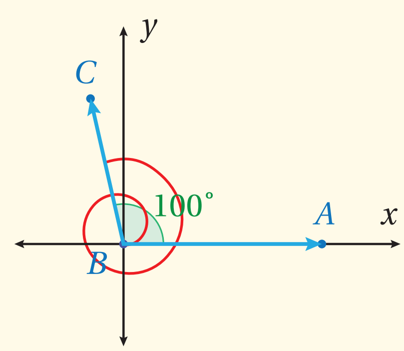
أرسمُ زاويةً قياسُها $460°$ في الوضعِ القياسيِّ، مُحدِّدًا مكانَها. أنظر الهامش.

80

إجابة التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي2):

$$460° = 360° + 100°$$

وبذلك، فإنَّ ضلع الانتهاء سيظهر في الربع الثاني.



مثال 3

- أبدأ برســم دائرة في المستوى الإحداثي بحيث يكون مركزها في نقطة الأصل، ثم أُعرِّف دائرة الوحدة.
- أرســم الزاوية θ بالوضع القياســي في الربع الأوَّل، بحيث يقطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة في نقطة مثل P، وأُعرِّف النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ بدلالة إحداثيي $P(x, y)$، ليستنتجوا أنَّ $P(\cos\theta , \text{sine}\ \theta)$.
- أُناقِش الطلبة فــي حل المثال 3، ثم أطلب إليهم –في كل فرع– تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية في دائرة الوحدة قبل رسمها، ثم تبرير إجاباتهم.

أخطاء شائعة:

قد يُخطِئ بعض الطلبة في الإشارة الموجبة أو الإشارة السالبة عند قســمة $\sin x$ على $\cos x$ للحصول على $\tan x$؛ لــذا أُذكِّر الطلبة بحقائق الضرب والقســمة للأعداد الحقيقية.

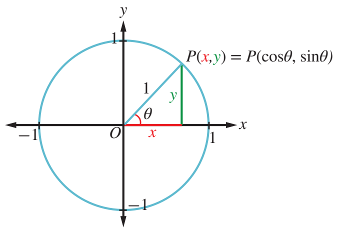
إرشـاد: أُوجِّــه الطلبــة إلــى إشــارات الأعــداد علــى المحوريــن الإحداثييــن؛ لتحديــد إشــارات $\sin x$ و $\cos x$ فــي الأربــاع المختلفــة، بحيــث ترتبــط إشــارة $\cos x$ بإشــارة الأعــداد علــى المحــور الأفقــي x، وترتبــط إشــارة $\sin x$ بإشــارة الأعــداد علــى المحــور الرأســي y.

تنويع التعليم:

- أُوجِّه الطلبة ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط إلى حل السؤال الآتي:

» النقطــة P تمثل نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية مع دائرة الوحدة. إذا كان $\sin\theta = -0.8$, $\cos\theta = 0.6$، فأجد إحداثيات النقطة P، ثم أُحدِّد الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية.

دائرةُ الوحدةِ (unit circle) هيَ دائرةٌ مركزُها نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ قُطْرِها وحدةٌ واحدةٌ. إذا رُسِمَتِ الزاويةُ θ في الوضعِ القياسيِّ، فإنَّ ضلعَ انتهائِها يقطعُ دائرةَ الوحدةِ في نقطةٍ وحيدةٍ هيَ $P(x, y)$. ومعَ تغيُّرِ قياسِ الزاويةِ يتغيَّرُ موقعُ النقطةِ P على الدائرةِ، ويتغيَّرُ إحداثيّاها.



يُمكِنُ تعريفُ النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ للزاويةِ θ بدلالةِ إحداثيَّيْ P كما يأتي:

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

لغة الرياضيات

الحــرف اليونانــي θ يُقرَأُ: ثيتا، وهو يُســتعمَل للدلالة على قياسِ الزاويةِ.

رموزٌ رياضيةٌ

يدلُّ الرمزُ $\sin\theta$ على نسبةِ جيــبِ الزاويــةِ θ، والرمزُ $\cos\theta$ علــى نســبةِ جيبِ التمــامِ، والرمزُ $\tan\theta$ على نسبةِ ظلِّ الزاويةِ θ.

مثال 3

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، التي يقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ الواردةِ في ما يأتي:

1) $P(-0.6, 0.8)$

$$\sin\theta = y = 0.8, \quad \cos\theta = x = -0.6, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0.8}{-0.6} = -\frac{4}{3}$$

2) $P\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

$$\sin\theta = y = -\frac{12}{13}, \quad \cos\theta = x = \frac{5}{13}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-12/13}{5/13} = -\frac{12}{5}$$

إرشادٌ

النســبُ المثلثيةُ الأساسيةُ للزاويــةِ θ هــيَ: $\sin\theta$، وَ $\cos\theta$، وَ $\tan\theta$.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، التي يقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ عندَ النقطةِ $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. أنظر الهامش.

إجابة التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي3):

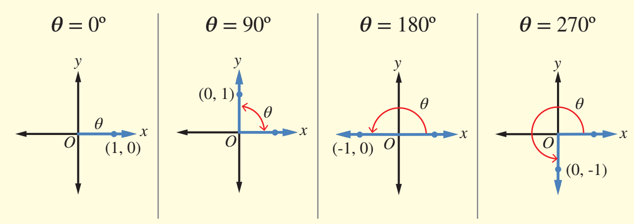
$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan\theta = 1$$

وضلع الانتهاء للزاوية يقع في الربع الثالث.

عندَ رسمِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ، قدْ يقعُ ضلعُ انتهائِها في أحدِ الأرباعِ الأربعةِ، فيقالُ عندئذٍ إنَّ الزاويةَ θ واقعةٌ في الربعِ كذا، وقدْ ينطبقُ ضلعُ انتهائِها على أحدِ المحوريْنِ الإحداثييْنِ، فتُسمّى الزاويةُ θ في هذهِ الحالةِ **زاويةً ربعيةً** (quadrantal angle).

مفهومٌ أساسيٌّ **الزوايا الربعيةُ**

الزوايا الربعيةُ في دائرةِ الوحدةِ:



يُمكِنُ تحديدُ النسبِ المثلثيةِ للزوايا الربعيةِ منْ إحداثياتِ نقاطِ تقاطعِ دائرةِ الوحدةِ معَ المحوريْنِ الإحداثييْنِ. فمثلًا، يتقاطعُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ $90°$ في الوضعِ القياسيِّ معَ دائرةِ الوحدةِ في النقطةِ $P(0, 1)$. وبذلكَ، فإنَّ: $\sin 90° = 1$، $\cos 90° = 0$، ويكونُ $\tan 90°$ غيرَ مُعرَّفٍ لأنَّهُ لا تجوزُ القسمةُ على صفرٍ.

مثال 4

أينَ يقطعُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ التي قياسُها $180°$ دائرةَ الوحدةِ إذا رُسِمَتْ في الوضعِ القياسيِّ؟ أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ لها.

يقطعُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ التي قياسُها $180°$ دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ $C(-1, 0)$، إذنْ:

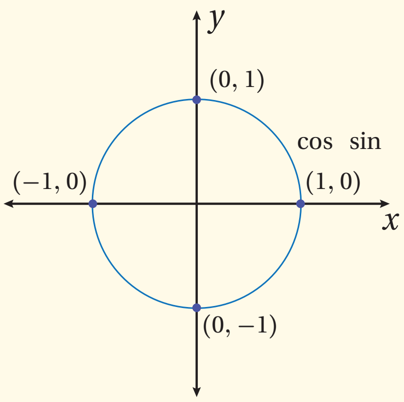
$$\sin 180° = y = 0, \quad \cos 180° = x = -1, \quad \tan 180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويتيْنِ اللتيْنِ قياسُ كلٍّ منْهُما $270°$، وَ $360°$ على الترتيبِ.

مثال 4

- أُعرِّف الزاوية الربعية بأنَّها الزاوية في الوضع القياسي التي ينطبق ضلع انتهائها على أحد المحورين الإحداثيين، وأنَّها تحديدًا الزوايا التي قياساتها: $0°, (360°), 90°, 180°, 270°$.
- أربط كل زاوية ربعية بإحداثيي النقطة P على دائرة الوحدة، ليسهل على الطلبة تذكُّر النسب المثلثية لهذه الزوايا:



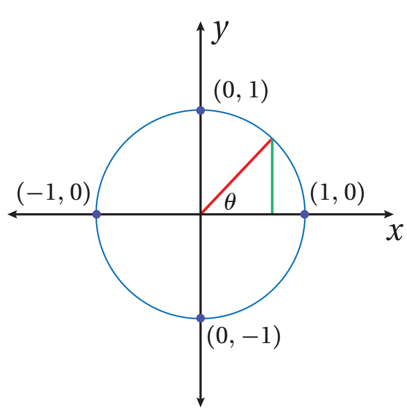
$(\cos 0°, \sin 0°) \to P(1, 0)$
$(\cos 90°, \sin 90°) \to P(0, 1)$
$(\cos 180°, \sin 180°) \to P(-1, 0)$
$(\cos 270°, \sin 270°) \to P(0, -1)$

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 الذي يُبيِّن حساب النسب المثلثية لإحدى الزوايا الربعية، مُبيِّنًا أنَّ الإحداثي x لنقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية الربعية هو جيب تمام الزاوية، وأنَّ الإحداثي y هو جيب الزاوية.

إرشاد: الاختصار u.d. يعني undefined؛ أيْ غير مُعرَّف.

أخطاء شائعة:

قد يُخطِئ بعض الطلبة في تحديد النسب المثلثية للزوايا الربعية، فيربطون نسبة الجيب بالمحور x، ونسبة جيب التمام بالمحور y؛ لذا أُذكِّرهم أنَّ المحور x يرتبط بالضلع المجاور للزاوية في وضعها القياسي، وأنَّ المحور y يرتبط بالضلع المقابل لها، وأُدرِّبهم على تخيُّل الرسم في كل مرَّة.



إجابة التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 4):

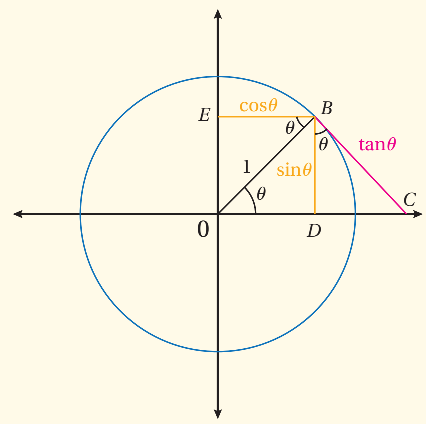
$\sin 270° = -1, \cos 270° = 0, \tan 270°$ u.d.

$\sin 360° = 0, \cos 360° = 1, \tan 360° = 0$

مثال 5

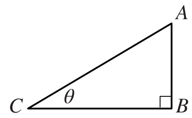
- أرسم الشكل التالي (من دون كتابة النسب المثلثية الأساسية عليه) باستعمال أقلام ملونة، ثم أطلب إلى الطلبة تحديدها، وأناقشهم في الإجابات.

> **إرشاد:** إذا توافر جهاز حاسوب داخل غرفة الصف، أو تمكَّنت من تقديم الدرس في مختبر الحاسوب، فأرسم الشكل باستعمال برمجية جيوجبرا.



- أُحرِّك موقع النقطة B إلى الربع الثاني، وأُوضِّح للطلبة أنَّ الزاوية θ تصبح منفرجة، ثم أسألهم:
  » ما إشارة كلٍّ من الإحداثي x والإحداثي y للنقطة؟ سالب ، موجب.
  » هــل يُتوقَّع أنْ تكــون جميع قِيَم النســب المثلثية للزاوية موجبة؟ لماذا؟ لا ، ستتنوَّع إجابات الطلبة.
  » ما دلالة الإشــارة الســالبة للإحداثي x؟ النسب المثلثية $\cos\theta$ و $\tan\theta$ ســتكون سالبة، في حين يكون $\sin\theta$ موجبًا.
- أستمع لإجابات الطلبة، ثم أسألهم كل مرَّة:
  » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  » ما هذه الإجابة؟
- أُكرِّر الأسـئلة السابقة بعد تحريك موقع النقطة B إلى الربع الثالــث، وأُوضِّح للطلبة أنَّ قياس الزاوية θ يقع بين $180°$ و $270°$، ثم أُحرِّك موقع النقطة B إلى الربع الرابع، مُبيِّنًا أنَّ قياس الزاوية θ يقع بين $270°$ و $360°$.
- أسـتعمل نظرية فيثاغورس للتوصُّل إلــى المتطابقة المثلثيــة الأساســية $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$، في دائرة الوحدة.

إذا كانَتْ θ زاويةً حادَّةً، فإنَّهُ يُمكِنُ رسمُ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ تكونُ θ إحدى زواياهُ.



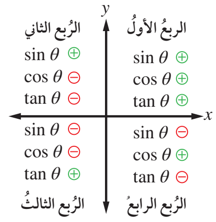
$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ نظريةُ فيثاغورس

$\frac{(BC)^2}{(AC)^2} + \frac{(AB)^2}{(AC)^2} = \frac{(AC)^2}{(AC)^2}$ بقسمةِ الطرفيْنِ على $(AC)^2$

$\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = 1$ بتطبيقِ قوانينِ الأسسِ

$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ بالتعويضِ

تظلُّ هذهِ النتيجةُ صحيحةً بقطعِ النظرِ عنْ قياسِ الزاويةِ θ، وهيَ تُستعمَلُ لإيجادِ إحدى هاتيْنِ النسبتيْنِ إذا عُلِمَتِ الأُخرى ولكن يجبُ مراعاةُ إشاراتِ النسبِ المثلثيةِ؛ فهيَ تختلفُ بحسبِ الربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ في الوضعِ القياسيِّ كما هوَ مُوضَّحٌ في الشكلِ المجاورِ.



مثال 5

أجِدُ قيمةَ النسبتيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ إذا كانَ:

1 $\sin\theta = -\frac{1}{5}$، ووقعَ ضلعُ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الثالثِ.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ نتيجةٌ لنظريةِ فيثاغورس

$\cos^2\theta + \left(\frac{-1}{5}\right)^2 = 1$ بتعويضِ قيمةِ $\sin\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$ بطرحِ $\frac{1}{25}$ منَ الطرفيْنِ

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{24}}{5}$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{24}}{5}$ في الربعِ الثالثِ يكونُ $\cos\theta$ سالبًا

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-1/5}{-\sqrt{24}/5} = \frac{1}{\sqrt{24}}$

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 5 الذي يُوضِّح استعمال المتطابقة المثلثية الأساسية في إيجاد باقي النســب المثلثية لزاوية ما إذا عُلِمت إحدى هذه النســب، وأُركِّز في الفرع 1 من المثال على خطوة أخــذ الجذر التربيعي للطرفين، وأهمية كتابة $\pm$ لقيمة النســبة المثلثية، مُبيِّنًا أنَّ اختيار القيمة الموجبة أو القيمة السالبة للنسبة المثلثية يعتمد على تحديد إشارتها بحسب الربع الذي تقع فيه الزاوية.
- في الفــرع 2 من المثال، أُركِّز علــى خطوة اســتبدال $\sin x$ بدلالة $\cos x$ (أو العكس) قبل استعمال المتطابقة المثلثية الأساســية، وأُؤكِّد وجوب تنفيذ هذه الخطوة عندما يكون المعطى هو $\tan x$.

> **إرشــاد:** أستعمل الاختصار ASTC لمساعدة الطلبة على تذكُّر إشارات النسب المثلثية الأساســية في الأرباع الأربعة؛ إذ ترمز حروف هذا الاختصار إلى النسبة / النسب الموجبة في كل ربع على الترتيب، بدءًا بالربع الأوَّل:
> (All, Sine, Tangent, Cosine)

برعَ عالِمُ الفَلَكِ والرياضياتِ المُسْلِمُ محمدُ بنُ جابرٍ البتانيُّ في علمِ المثلثاتِ، واكتشفَ العديدَ مِنَ العلاقاتِ المُهمَّةِ بينَ النسبِ المثلثيةِ، مثلَ:

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2 $\tan\theta = -3.5$ ، ووقعَ ضلعُ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الثاني.

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = -3.5$ بالتعويضِ

$\sin\theta = -3.5\cos\theta$ بضربِ الطرفيْنِ في $\cos\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ نتيجةً لنظريةِ فيثاغورس

$\cos^2\theta + (-3.5\cos\theta)^2 = 1$ بتعويضِ قيمةِ $\sin\theta$

$\cos^2\theta + 12.25\cos^2\theta = 1$ بالتربيعِ

$13.25\cos^2\theta = 1$ بالتبسيطِ

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{13.25}$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 13.25

$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{13.25}} \approx \pm 0.2747$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ، واستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$\cos\theta = -0.2747$ في الربعِ الثاني يكونُ $\cos\theta$ سالبًا

$\sin\theta = -3.5 \times -0.2747$ بتعويضِ قيمةِ $\cos\theta$

$= 0.96145 \approx 0.96$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ مِنْ $\sin\theta$ وَ $\tan\theta$ إذا كانَ $\cos\theta = 0.8$، ووقعَ ضلعُ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الرابعِ. أنظر الهامش.

أتدرب وأحل المسائل

أرسمُ الزوايا الآتيةَ في الوضعِ القياسيِّ: 4–1 أنظر ملحق الإجابات.

1) $225°$ 2) $160°$ 3) $330°$ 4) $240°$

أُحدِّدُ الربعَ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ كلِّ زاويةٍ ممّا يأتي إذا رُسِمَتْ في الوضعِ القياسيِّ:

5) $285°$ الربع الرابع 6) $75°$ الربع الأوّل 7) $100°$ الربع الثاني 8) $265°$ الربع الثالث

إجابة التدريب في بند (أتحقّق من فهمي 5):

$(\sin x)^2 + (0.8)^2 = 1$

$(\sin x)^2 = 1 - 0.64 = 0.36$

$\sin x = \pm 0.6$

ولأنَّ ضلع انتهاء الزاوية في الربع الرابع؛ فإنَّ:

$\sin x = -0.6$

$\tan x = \dfrac{-0.6}{0.8} = -0.75$

إرشـاد: أُوجِّه الطلبة إلى استعمال الرمز ≈ للدلالـة على تقريـب النواتج عند اسـتعمال الآلة الحاسبة.

إرشـاد: يمكن الاسـتعانة بوسـيلة تعليمية يُعِدُّهـا المُعلِّم/ المُعلِّمة، وهي لـوح من الكرتون رُسِـم عليه دائرة الوحدة في المسـتوى الإحداثي، ومسـطرة (تُمثِّل ضلع انتهاء الزاويـة θ)، ثُبِّت على أحـد طرفيها خيط صوف حر، وعلـى طرفها الآخر دبوس فـي نقطة الأصـل (رأس الزاويـة). ثم يبدأ المُعلِّـم/ المُعلِّمة بتحريك المسـطرة بدءًا من ضلع ابتداء الزاوية، ويسـأل الطلبة عن أثـر ازدياد قياس الزاوية في كلٍّ مـن الضلعين: المجـاور، والمقابل (خيط الصوف)، لاسـتنتاج إشارات النسب المثلثية الأساسية في الأرباع الأربعة.

المفاهيم العابرة:

بعد الانتهاء من حل المثال 5، أُعزِّز الوعي **بالقضايا الإنسانية (تقدير العلم والعلماء)** عن طريق حوار تديره مع الطلبة عن دور العالِم البتانـي في تطوير علم المثلثات، وتوجيههم إلى البحث في مصادر المعرفة المتاحة، وإعداد تقرير بإسهاماته في تطور هذا العلم، وتضمينه أسـماء علماء آخرين كان لهم دور بارز مثله، مُؤكِّدًا ضرورة توثيق مصدر معلوماتهم.

4 التدريب

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبـة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسـائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1–26) ضمن مجموعات ثنائية داخـل الغرفة الصفية؛ فهذه المسـائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشـرًا بأمثلة الدرس، وهي تُسـتعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسـها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحـد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسـألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ اسـتراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تسـاؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (30 – 29).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى
- هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 27, 28 كتاب التمارين: (18–1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 27, 28, 30 كتاب التمارين: ,3, 5, 7, 9, 11 13, 15, 17
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (30 – 27) كتاب التمارين: (21 – 17)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة تبرير إجابتهم للسؤال 29 عن طريق الرسم، أو إعداد وسيلة أو نموذج يُبيِّن أكبر قيمة لنسبة جيب الزاوية وأصغر قيمة له، ثم أعرضه أمام الزملاء.

تعليمات المشروع:

- أوجِّه الطلبة إلى بدء تنفيذ الخطوة الأولى من المشروع، ورسم نسخة مكبرة للمستوى القطبي على لوحة كرتون، باستعمال المسطرة والفرجار، ثم تعيين 6 نقاط تُمثِّل رؤوس سداسي منتظم، مُذكِّرًا إيّاهم أنَّ السداسي المنتظم هو مضلع تساوت جميع أطوال أضلاعه، وجميع قياسات زواياه.

6 الختام

أطلب إلى الطلبة في نهاية الدرس تلخيص ما تعلَّموه بعباراتهم الخاصة، ثم أطلب إلى كلٍّ منهم اختيار موضوع من الدرس أتقنه، وكتابة سؤال عنه، وموضوع يحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانه، وكتابة سؤال عنه.

أُحدِّدُ الربعَ (أوِ الأرباعَ) الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ إذا كانَ:

9) $\sin\theta > 0$ الربع الأوَّل، والربع الثاني

10) $\cos\theta > 0$ الربع الأوَّل، والربع الرابع

11) $\tan\theta < 0$ الربع الثاني، والربع الرابع

12) $\sin\theta < 0$ و $\cos\theta < 0$ الربع الثالث

أُحدِّدُ الربعَ (أوِ الأرباعَ) الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ إذا كانَ:

13) $\sin\theta = -0.7$ الربع الثالث، والربع الرابع

14) $\tan\theta = 2$ الربع الأوَّل، والربع الثالث

15) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ الربع الثاني، والربع الثالث

16) $\tan\theta = -1$ الربع الثاني، والربع الرابع

17) $\cos\theta = 0.45$ الربع الأوَّل، والربع الرابع

18) $\sin\theta = 0.55$ الربع الأوَّل، والربع الثاني

19) $\sin\theta = 0.3, \cos\theta < 0$ الربع الثاني

20) $\tan\theta = -4, \sin\theta > 0$ الربع الثاني

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ إذا قطعَ ضلعُ انتهائِها في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقاطِ الآتيةِ:

21–24 أنظر ملحق الإجابات.

21) $P(0, -1)$

22) $P(0.5, 0.5\sqrt{3})$

23) $P\left(\frac{-8}{17}, \frac{15}{17}\right)$

24) $P\left(\frac{20}{29}, \frac{-21}{29}\right)$

أَجِدُ النسبتيْنِ المثلثتيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ في الحالاتِ الآتيةِ: 28–25 أنظر ملحق الإجابات.

25) $\sin\theta = \frac{3}{4}$, $90° < \theta < 180°$

26) $\tan\theta = 0.78$, $-1 < \sin\theta < 0$

27) $\cos\theta = -0.75$, $\tan\theta < 0$

28) $\sin\theta = -0.87$, $270° < \theta < 360°$

مهارات التفكير العليا

29, 30 أنظر ملحق الإجابات.

29) **تبريرٌ:** ما أكبرُ قيمةٍ لجيبِ الزاويةِ؟ ما أصغرُ قيمةٍ لهُ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

30) **أكتشفُ الخطأَ:** حَلَّ كلٌّ منْ أمجدَ وزينةٍ المسألةَ الآتيةَ. إذا كانَ $\tan x = 0.75$ ، وكانَتْ x بينَ $180°$ وَ $360°$، فما قيمةُ $\sin x + \cos x$؟

أمجدُ:
$\sin x + \cos x = 0.2$

زينةُ:
$\sin x + \cos x = -1.4$

أُحدِّدُ أيُّهما كانَتْ إجابتُهُ صحيحةً، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس 2

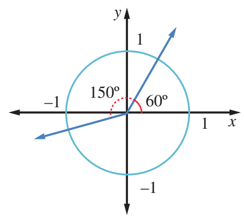
النسبُ المثلثيةُ للزوايا ضمنَ الدورةِ الواحدةِ

Trigonometric Ratios for Angles between 0º and 360º

فكرةُ الدرسِ إيجادُ النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ لأيِّ زاويةٍ بينَ 0º وَ360º، وإيجادُ الزاويةِ إذا عُرِفَتْ إحدى نسبِها المثلثيةِ.

المصطلحاتُ الزاويةُ المرجعيةُ، معكوسُ النسبةِ المثلثيةِ.

مسألةُ اليومِ دارَ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ قياسُها 60º في الوضعِ القياسيِّ بزاويةِ 150º عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ. كيفَ نجدُ إحداثيَّيْ نقطةِ تقاطعِ ضلعِ الانتهاءِ معَ دائرةِ الوحدةِ في موقعِهِ الجديدِ؟



تعرَّفْنا في الدرسِ السابقِ كيفيةَ إيجادِ النسبِ المثلثيةِ لزاويةٍ مرسومةٍ في الوضعِ القياسيِّ باستعمالِ إحداثيَّيْ نقطةِ تقاطعِ ضلعِ انتهائِها معَ دائرةِ الوحدةِ، وسنتعرَّفُ في هذا الدرسِ كيفَ نجدُ النسبَ المثلثيةَ إذا عُلِمَ قياسُ الزاويةِ بالدرجاتِ.

إذا وقعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الربعِ الأولِ (أيْ كانَتْ $0^\circ < \theta < 90^\circ$)، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ النسبِ المثلثيةِ لهذهِ الزاويةِ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوْ بما نحفظُهُ منْ نسبٍ مثلثيةٍ للزوايا الخاصةِ: $(30^\circ, 45^\circ, 60^\circ)$.

مراجعةُ المفاهيمِ النسبُ المثلثيةُ للزوايا الخاصةِ

θ	0º	30º	45º	60º	90º
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غيرُ مُعرَّفٍ

86

الدرس 2

نتاجات الدرس

- إيجاد النسب المثلثية الأساسية لزاوية بين $0°$ و$360°$
- إيجاد الزاوية إذا عُلِمت إحدى نسبها المثلثية باستعمال الآلة الحاسبة، أو الزوايا الخاصة.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- علاقة إحداثيي نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية بدائرة الوحدة مع النسب المثلثية للزاوية.
- استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد نسبة مثلثية أساسية لزاوية حادة.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أرسم دائرة الوحدة، وأرسم زاوية θ بالوضع القياسي، ثم أُحدِّد نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية مع دائرة الوحدة، ثم أكتب إحداثيي النقطة بالصورة $(\cos\theta, \sin\theta)$.
- أُذكِّر الطلبة بإشارات النسب المثلثية الأساسية في الأرباع المختلفة للمستوى الإحداثي، واستعمال الاختصار ASTC.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأُذكِّرهم بكيفية استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد جيب زاوية حادة، ثم أطلب إليهم إيجاد $\sin 30°$ ، ثم إيجاد $\sin^{-1}(0.5)$
- أطلب إلى الطلبة إيجاد $\sin^{-1}(-0.5)$، ثم أسألهم عن توقعاتهم بخصوص النتيجة التي ستظهر على الآلة الحاسبة.
- أستمع إلى إجابات أكبر عدد من الطلبة، ثم أطلب إليهم إيجاد القيمة باستعمال الآلة الحاسبة، ثم أسألهم: ما النتيجة؟ -30
- أُوضِّح للطلبة أنَّ الآلة الحاسبة مبرمجة لحساب قيم جيب الزاوية بين -90 و 90 ، وأنَّهم سيتعلَّمون في هذا الدرس إيجاد الحلول للزوايا من $0°$ إلى $360°$

2 الاستكشاف

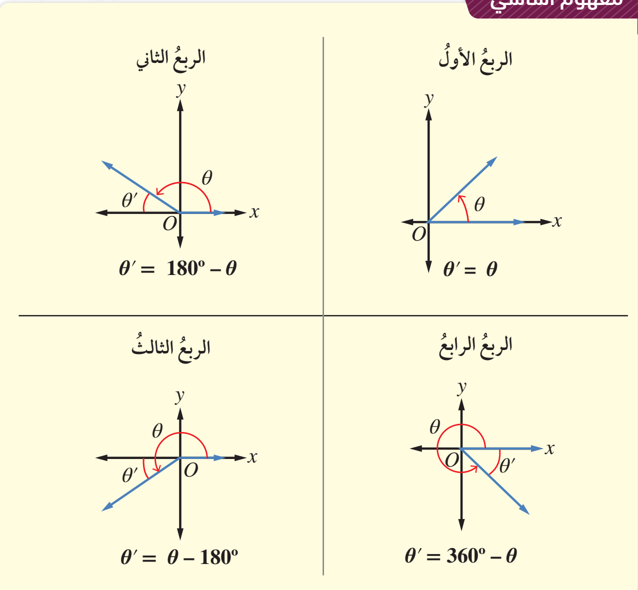
- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المســألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » ما قياس الزاوية بعد دوران ضلع الانتهاء؟ $210°$
  » في أيِّ ربع تقع هذه الزاوية؟ الربع الثالث.
  » ما إشـارات النســب المثلثية الأساسـية في هذا الربع؟ $\tan > 0$, $\cos < 0$, $\sin < 0$
- كيف نجد إحداثيي نقطة تقاطع ضلع الانتهاء مع دائرة الوحدة للزاوية التي قياسها $210°$؟

3 التدريس

- أُذكِّـر الطلبة بالنســب المثلثيــة للزوايــا الخاصة/ المشهورة ($0°, 30°, 60°, 45°, 90°$).
- أُشـير إلى أنَّ الزاوية التي قياسها $0°$ هي نفسها الزاوية التي قياسها $360°$
- أُوضِّح للطلبة أنَّ معرفة النسب المثلثية للزوايا الخاصة في الربع الأوَّل تساعد على تحديد النسـب المثلثية للعديد من الزوايا التـي هي انعكاس للزاوية الخاصة في أحــد الأرباع (الثاني، أو الثالث، أو الرابع)، حيث إنَّ النســب المثلثيــة للزوايا الناتجة مــن الانعكاس ستكون نفس النسب المثلثية للزاوية الخاصة في الربع الأوَّل، مع الاختلاف أحيانًا في الإشــارة (أســألهم: لماذا؟)

أمّا إذا وقعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ في أيٍّ منَ الأرباعِ الثلاثةِ الأُخرى، فإنَّ نسـبَها المثلثيةَ تكونُ مُرتبِطةً بالنسبِ المثلثيةِ **للزاويةِ المرجعيةِ** (reference angle) θ'، وهيَ الزاويةُ الحادَّةُ المحصورةُ بينَ ضلعِ انتهاءِ الزاويةِ θ والمحورِ x.

مفهومٌ أساسيٌّ — **الزاويةُ المرجعيةُ**



النسـبُ المثلثيةُ للزاويةِ θ تساوي النسـبَ المثلثيةَ لزاويتِها المرجعيةِ θ' معَ اختلافِ الإشارةِ أحيانًا بحسبِ الربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ.

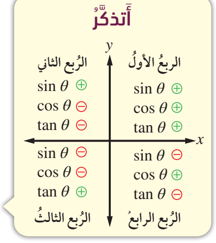
لإيجادِ النسبِ المثلثيةِ لأيِّ زاويةٍ θ، فإنَّنا نتَّبعُ الخطواتِ الثلاثَ الآتيةَ:

الخطوةُ 1: إيجادُ الزاويةِ المرجعيةِ θ'.

الخطوةُ 2: إيجادُ النسبةِ المثلثيةِ للزاويةِ المرجعيةِ θ'.

الخطوةُ 3: تحديدُ إشارةِ النسبةِ المثلثيةِ للزاويةِ θ بحسبِ الربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهائِها.

أَتذكَّرُ

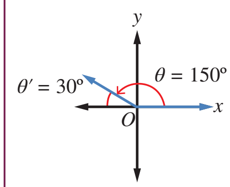


مثال 1

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin 150°$

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ $150°$ في الربعِ الثاني؛ لذا أَستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:



$\theta' = 180° - \theta$ إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

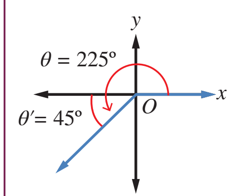
$= 180° - 150°$ $\theta = 150°$

$= 30°$ بالتبسيطِ

$\sin 150° = \sin 30° = 0.5$ الجيبُ موجبٌ في الربعِ الثاني

2 $\cos 225°$

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ $225°$ في الربعِ الثالثِ؛ لذا نستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:



$\theta' = \theta - 180°$ إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$= 225° - 180°$ $\theta = 255°$

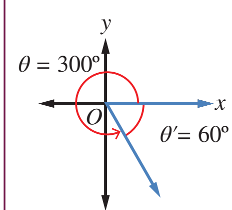
$= 45°$ بالتبسيطِ

$\cos 225° = -\cos 45°$ جيبُ التمامِ سالبٌ في الربعِ الثالثِ

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$

3 $\tan 300°$

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ $300°$ في الربعِ الرابعِ؛ لذا نستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:



$\theta' = 360° - \theta$ إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$\theta' = 360° - 300°$ $\theta = 300°$

$= 60°$ بالتبسيطِ

$\tan 300° = -\tan 60°$ الظلُّ سالبٌ في الربعِ الرابعِ

$= -\sqrt{3}$

88

مثال 1

- أُقدِّم للطلبة مفهوم الزاوية المرجعية/ زاوية المرجع reference angle، ثم أرسم على اللوح حالات الزوايا في باقي الأرباع، مُبيِّنًا علاقة كلٍّ منها بزاوية المرجع، ومُذكِّرًا الطلبة بإشارات النسب المثلثية الأساسية في كلٍّ من الأرباع المختلفة، والمعادلة التي تُوضِّح العلاقة بين الزاوية θ وزاوية المرجع θ' الخاصة بكل ربع.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1، مُبرِّرًا كل خطوة.

إرشاد: أُذكِّر الطلبة بمفهوم الانعكاس حول مستقيم وحول نقطة. يمكنني مساعدة الطلبة على فهم علاقة الزوايا في الربع الثاني والثالث والرابع بزاوية المرجع عن طريق عمل انعكاس للضلع النهائي لتلك الزوايا، بحيث تظهر صورته بعد الانعكاس في الربع الأوَّل (الانعكاس حول المحور y عندما تقع الزاوية في الربع الثاني، وحول نقطة الأصل عندما تقع في الربع الثالث، وحول المحور x عندما تقع في الربع الرابع).

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

✎ أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $\sin 120°$ b) $\tan 240°$

c) $\cos 315°$ d) $\sin 210°$

جميعُ الزوايا في المثالِ السابقِ مُرتبطةٌ بزوايا مرجعيةٍ مألوفةٍ، مثلِ: $30°$، أوْ $45°$، أوْ $60°$، وهيَ زوايا خاصةٌ عرفْنا قيمَ النسبِ المثلثيةِ لها. ولكنْ، كيفَ نجدُ النسبَ المثلثيةَ لأيِّ زوايا أُخرى؟ يُمكِنُ إيجادُ النسبِ المثلثيةِ للزاويةِ المرجعيةِ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، ثمَّ تحديدِ الإشارةِ المناسبةِ تبعًا للربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ.

انتبهْ

يجبُ ضبطُ الآلةِ الحاسبةِ على خيارِ درجاتٍ (DEGREES) قبلَ استعمالِها. أسألُ مُعلِّمي.

مثال 2

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

1 $\sin 255°$

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ $255°$ في الربعِ الثالثِ؛ لذا أستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:

$\theta' = \theta - 180°$ إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$\theta' = 255° - 180°$ $\theta = 255°$

$= 75°$ بالتبسيطِ

$\sin 255° = -\sin 75°$ الجيبُ سالبٌ في الربعِ الثالثِ

والآنَ، أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sin 75°$ كما يأتي:

أضغطُ على مفتاحِ sin، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 75، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ =، فتظهرُ النتيجةُ:

sin 7 5 = 0.965925826

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، تكونُ النتيجةُ: 0.966

إذنْ، $\sin 255° \approx -0.966$

إرشاد: أُوجِّه الطلبة إلى تذكُّر العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين المتتامتين واستعمالها ليسهل عليهم تذكُّر تلك النسب للزوايا الخاصة:

$$\sin\theta = \cos(90° - \theta)$$

تنويع التعليم:

توسعة:

- أُوجِّه الطلبة إلى حل السؤال الآتي:

» أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin^2(300°) + \cos^2(300°)$ 1

2 $2\sin 210° + 1$ 0

3 $\cos 135° + \sin 135°$ 0

إجابة التدريب في بند (أتحقّق من فهمي 1):

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

يُمكِنُ أيضًا إيجادُ $\sin 255°$ مباشــرةً باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ منْ دونِ إيجادِ الزاويةِ المرجعيةِ على النحوِ الآتي:

أضغطُ على مفتاحِ sin، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 255، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ =، فتظهرُ النتيجةُ:

sin 2 5 5 = -0.965925826

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشــريةٍ، تكونُ النتيجةُ -0.966، وهيَ النتيجةُ نفسُها التي توصَّلْتُ إليْها آنفًا.

2 $\tan 168°$

أضغطُ على مفتاحِ tan، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 168، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ =، فتظهرُ النتيجةُ:

tan 1 6 8 = -0.212556561

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، تكونُ النتيجةُ: -0.213

إذنْ، $\tan 168° \approx -0.213$

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

a) $\sin 320°$ b) $\cos 175°$ c) $\tan 245°$

لغةُ الرياضيات

- نقرأ معكوسَ الجيبِ sine inverse.
- نقرأ معكوسَ جيبِ التمام cosine inverse.
- نقرأ معكوسَ الظلّ tan inverse.

يُمكِنُ اســتعمالُ الآلةِ الحاســبةِ لإيجادِ قياسِ أيِّ زاويةٍ حادَّةٍ (في الربعِ الأولِ) عُلِمَتْ إحدى نسبِها المثلثيةِ، وذلكَ باستعمالِ **معكوسِ النسبةِ المثلثيةِ** (inverse trigonometric ratio). فإذا عُلِمَ جيبُ الزاويةِ استُعمِلَ معكوسُ الجيبِ ($\sin^{-1}$)، وإذا عُلِمَ جيبُ تمامِ الزاويةِ استُعمِلَ معكوسُ جيبِ التمــامِ ($\cos^{-1}$)، وإذا عُلِمَ ظلُّ الزاويةِ اســتُعمِلَ معكــوسُ الظلِّ ($\tan^{-1}$). وبالطريقةِ نفســها، يُمكِنُ إيجادُ قيــاسِ أيِّ زاويةٍ في الأرباعِ الثلاثةِ الباقيةِ باســتعمالِ مفهومِ الزاويةِ المرجعيةِ وإشاراتِ النسبِ المثلثيةِ في الأرباعِ الأربعةِ.

90

إجابة التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 2):

a) ≈ -0.643

b) ≈ -0.996

c) ≈ 2.145

مثال 2

- أسأل الطلبة: كيف نجد النسب المثلثية لزاوية ليست حادة وزاويتها المرجعية ليســت خاصة، مثل: $178°$، أو $255°$؟
- أستمع لإجابة أحد الطلبة، ثم أسأل زملاءه: مَنْ يوافقه الرأي؟ لماذا؟ مَنْ لديه إجابة أخرى؟ ما هذه الإجابة؟
- أُؤكِّد للطلبة أنَّه يمكن إيجاد النسب المثلثية الأساسية لأيِّ زاوية ليســت حادة بالاســتعانة بزاوية المرجع والآلة الحاسبة.
- أُناقِــش مــع الطلبة حــل المثال 2، ثــم أطلب إليهم تطبيق خطوات استعمال الآلة الحاسبة، وكتابة الناتج النهائي بالتقريب إلى أقرب جزء من ألف، واستعمال الرمز $\approx$.

إرشاد: أُوجِّه الطلبة إلى ضبط الآلات الحاسبة علــى نظام الدرجــات DEG أو D، وأُنبِّههم إلى أنَّ هذا الضبط يظهر بصورة COMP أو NORM1 على الشاشة بحسب نوع الآلة التي يستعملونها.

تنويع التعليم:

يمكن التركيز على تطوير مهارات الطلبة لاســتعمال الآلة الحاســبة في دروس هــذه الوحدة؛ فهي مــن المهارات الحياتية الأساسية، ويمكن مساعدة الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط على إتقان هذه المهارة عن طريق العمل في مجموعات ثنائية مع زميل من ذوي المستوى المتوسط أو فوق من المتوسط.

مثال 3

- أطرح على الطلبة السؤالين الآتيين:
  » كيف يمكن إيجاد الزاوية إذا عُلِمت إحدى نسبها المثلثية، مثل: $\cos x = 0.5$؟
  » ما عدد الزوايا بين $0°$ و $360°$ التي تُحقِّق العلاقة: $\cos = 0.5$ ؟ ما هذه الإجابة؟ أُبرِّر إجابتي. $60°$ و $300°$
- أُكرِّر السؤالين للعلاقة: $\cos x = 0.7$.
- أستمع لإجابات الطلبة، ثم أُدير نقاشًا معهم عن مفهوم معكوس النسبة المثلثية، مُركِّزًا على أنَّ الزوايا التي نجدها باستعمال هذا المفهوم تتراوح قيمتها بين -90 و 90؛ ما يعني توظيف معرفة إشارات النسب المثلثية الأساسية في الأرباع الأُخرى والزاوية المرجعية في تحديد الزاوية أو الزوايا المطلوبة بدقة.
- أُؤكِّد للطلبة أنَّ الرمز $\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$ لا يعني رفع النسبة المثلثية إلى الأس -1، ولا يعني مقلوب هذه النسبة، وإنَّما هو رمز متعارف عليه عالميًّا للدلالة على معكوس النسبة المثلثية، وأنَّها تُقرَأ على الترتيب: sine inverse, cosine inverse, tan inverse
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3، وأُؤكِّد في الفرع 1 من المثال أنَّه يمكن إيجاد زاويتين في هذه الحالة؛ لأنَّ الجيب موجب في الربعين الأوَّل والثاني، وأنَّ الآلة الحاسبة تُظهِر الزاوية التي في الأوَّل فقط، وأنَّه تُستعمَل زاوية المرجع لإيجاد الزاوية الأخرى. وفي الفرع 2 من المثال، أُؤكِّد أنَّ الإجابة التي تُقدِّمها الآلة الحاسبة لا يمكن أنْ تكون هي الإجابة المطلوبة عند إهمال الإشارة السالبة لنسبة ظل الزاوية؛ لأنَّها زاوية في الربع الأوَّل، ولأنَّ الظل يكون سالبًا في الربعين الثاني والرابع (أفترض تلك الزاوية مرجع للزاويتين المطلوبتين).

مثال إضافي:

- أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\sin 79°$ 2) $\tan 23°$

3) $\cos 86°$ 4) $\tan 58°$

- أجد قيمة (قِيَم θ) في ما يأتي:

5) $\cos \theta = 0.3298 \quad 0° \leq \theta \leq 360°$

$\theta = 70.7° , 289.3°$

6) $\tan \theta = -2.2701 \quad 180° \leq \theta \leq 360°$

$\theta = 293.8°$

مثال 3

أَجِدُ قيمةَ (أوْ قيمَ) θ في ما يأتي، علمًا بأنَّ $0° \leq \theta \leq 360°$:

1) $\sin \theta = 0.98$

$\theta = \sin^{-1}(0.98)$ — θ هيَ الزاويةُ التي نسبةُ الجيبِ لها 0.98

والآنَ، أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sin^{-1}(0.98)$ كما يأتي:

SHIFT sin 0 . 9 8 = 78.521659

وبالتقريبِ إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ، تكونُ النتيجةُ: $78.5°$، وهيَ زاويةٌ مرجعيةٌ لزاويةٍ أُخرى؛ لأنَّها تقعُ في الربعِ الأولِ. وبما أنَّ الجيبَ موجبٌ في ربعيْنِ (الأولُ والثاني فقطْ)، فإنَّ الزاويةَ الأُخرى θ تكونُ في الربعِ الثاني، ويُمكِنُ إيجادُها باستعمالِ العلاقةِ بينَ الزاويةِ المرجعيةِ والزاويةِ المناظرةِ في الربعِ الثاني التي تعرَّفْتُها آنفًا.

$\theta' = 180° - \theta$ — العلاقةُ بينَ الزاويةِ المرجعيةِ والزاويةِ المناظرةِ في الربعِ الثاني

$\theta' = 78.5°$

$78.5° = 180° - \theta$

$\theta = 101.5°$ — بحَلِّ المعادلةِ

إذنْ، $\theta = 78.5°$، أوْ $\theta = 101.5°$

2) $\tan \theta = -1.2$

$\theta = \tan^{-1}(-1.2)$ — θ هيَ الزاويةُ التي نسبةُ الظلِّ لها تساوي -1.2

والآنَ، أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\tan^{-1}(-1.2)$ كما يأتي:

SHIFT tan 1 . 2 = 50.1944289

وبالتقريبِ إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ، تكونُ النتيجةُ: $50.2°$؛ ولأنَّ الظلَّ يكونُ سالبًا في ربعيْنِ فقطْ (الثاني والرابعُ)؛ فإنَّ الزاويةَ $50.2°$ ليسَتْ منَ الحلولِ، وإنَّما زاويةٌ مرجعيةٌ لها.

إرشادٌ
بعضُ الآلاتِ الحاسبةِ تحوي المفتاحَ 2ND بدلَ المفتاحِ SHIFT.

أُفكِّرُ
أتجاهلُ الإشارةَ السالبةَ. لماذا؟

أخطاء شائعة:

قد يُخطِئ بعض الطلبة، فلا يجدون جميع الزوايا التي تُحقِّق الحل إذا عُلِمت إحدى النسب المثلثية؛ لذا أُذكِّرهم أنْ يبدؤوا الحل بتحديد الأرباع التي يمكن أنْ يقع ضلع انتهاء الزاوية فيها، وألفت انتباههم إلى أنَّ ذلك يعتمد على إشارات النسب الأساسية في الأرباع الأربعة، ثم أطلب إليهم إكمال حل السؤال.

إذا اســتعملْنا العلاقةَ بينَ الزاويةِ المرجعيةِ والزوايا المناظرةِ فــي الربعيْنِ الثاني والرابعِ، فإنَّنا سنجدُ هاتيْنِ الزاويتيْنِ:

زاويةُ الربعِ الثاني: $180° - 50.2° = 129.8°$

زاويةُ الربعِ الرابعِ: $360° - 50.2° = 309.8°$

أتحقق من فهمي

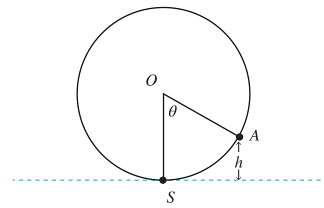
أَجِدُ قيمةَ (أوْ قيمَ) θ في كلٍّ ممّا يأتي، علمًا بأنَّ $0° \leq \theta \leq 360°$: أنظر الهامش.

a) $\cos\theta = -0.4$ b) $\tan\theta = 5.653$ c) $\sin\theta = -0.5478$

مثال 4: من الحياة

نواعيرُ: يُمثِّلُ الشكلُ الآتي ناعورةَ ماءٍ تدورُ بسرعةٍ ثابتةٍ، وتُمثِّلُ S في الشكلِ أخفضَ نقطةٍ تبلغُها الناعورةُ تحتَ الماءِ، في حينِ تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ الناعورةِ. إذا دارتِ الناعورةُ بزاويةِ θ؛ فإنَّ ارتفاعَ صندوقِ الماءِ الذي موقعُهُ النقطةُ A عنْ أخفضِ نقطةٍ تبلغُها الناعورةُ يُعطى بالعلاقةِ: $h = 7.5 - 7.5\cos\theta$ حيثُ (h) الارتفاعُ بالأمتارِ. أَجِدُ طولَ قُطرِ الناعورةِ.

الناعورةُ آلةٌ مائيَّةٌ دائريَّةٌ تتحرَّكُ بفعلِ جريانِ مياهِ الأنهارِ، وترفعُ الماءَ بوساطةِ صناديقَ إلى حوضٍ علويٍّ؛ فينسابُ في قنواتٍ نحوَ البساتينِ على ضفَّةِ النهرِ.



عندَما يصلُ الصندوقُ إلى النقطةِ الواقعةِ فوقَ S مباشرةً، فإنَّ ارتفاعَهُ عنْ أخفضِ موقعٍ لهُ يُساوي طولَ قُطرِ الناعورةِ، ويكونُ قياسُ θ في تلكَ اللحظةِ $180°$:

بتعويضِ قيمةِ θ	$h = 7.5 - 7.5\cos 180°$
$\cos 180° = -1$	$= 7.5 - 7.5(-1)$
بالتبسيطِ	$= 7.5 + 7.5 = 15$

إذنْ، طولُ قُطرِ الناعورةِ هوَ: 15 m

أتحقق من فهمي

أَجِدُ ارتفاعَ صندوقَ الماءِ الذي موقعُهُ النقطةُ A عندما تصبحُ $\theta = 235°$ أنظر الهامش.

إجابة التدريب في بند (أتحقّق من فهمي 3):

a) $\theta \approx 113.58°$ / $\theta \approx 246.42°$ b) $\theta \approx 79.97°$ / $\theta \approx 259.97°$

c) $\theta \approx 213.22°$ / $\theta \approx 326.78°$

إجابة التدريب في بند (أتحقّق من فهمي 4):

$h \approx 11.8$ m

مثال 4: من الحياة

- أرسم شكلًا تقريبيًّا على اللوح لحركة صندوق الناعورة الوارد في المثال 4.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 الذي يُنمذِج موقفًا حياتيًّا تُطبَّق فيه الحسابات المتعلقة بالنسب المثلثية للزوايا، مُبيِّنًا لهم أنَّ S هي أخفض نقطة تبلغها الناعورة، وأنَّه عندما تدور الناعورة يرتفع صندوق الماء وَفق العلاقة المعطاة، ويكون عند أقصى ارتفاع ممكن عندما يصبح في نقطة تقع على استقامة واحدة مع مركز الناعورة والنقطة S.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ قُطْر الدائرة هو أطول أوتارها، وأنَّه يمر بمركزها، وأنَّ الزاوية θ التي تقيس دوران الناعورة هي زاوية مركزية، وأنَّه عندما يكون قياس الزاوية المركزية $180°$، فإنَّها تكون على قُطْر الدائرة بالتأكيد.
- أُخبِر الطلبة أنَّه توجد العديد من المواقف الحياتية التي تُطبَّق فيها هذه الحسابات.

4 التدريب

أتدرَّب وأحلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1-6)، والمسائل (16 – 18) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (23 – 21).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

5 الإثراء

- أُوجِّـه الطلبة إلــى الحكم على مدى صحــة العبارة الآتية، وتقديم تبريراتهم بالطريقة التي يرونها مناسبة:
  » تزداد قيمة النســبة المثلثية $\sin \theta$ كلما زادت قيمة الزاوية θ عندما: $0° \leq \theta \leq 360°$.

نشاط التكنولوجيا:

- أُحفِّـز الطلبة على تصفُّـح الموقع الإلكتروني الذي يظهـر عند مسـح الرمز الآتي في المنزل، والاسـتمتاع باللعبة التفاعلية الخاصة بالنسـبتين المثلثتين: الجيب وجيب التمام لزوايا خاصة.

تعليمات المشروع:

- أُوجِّـه الطلبة إلى إكمــال تنفيذ الخطــوة الأولى من المشــروع، وإيجاد الإحداثيــات الديكارتية للنقاط الست التي عيَّنوها على الرسم.
- أُوجِّه الطلبة إلى إنشــاء جــدول يتضمَّن الإحداثيات القطبية، والإحداثيات الديكارتية لكل نقطة.
- أُبيِّــن للطلبة أنَّه يمكنهم البدء بتنفيــذ الخطوة الثانية، وحساب محيط الشكل السداسي.

6 الختام

نشاط (مسابقة بين فريقين)

المواد والأدوات:

آلة حاسبة لكل فريق، صندوق، بطاقات.

خطوات التنفيذ:

- أُجهِّز بطاقات مكتوب على كلٍّ منها سؤالًا عن إيجاد نسبة مثلثية لزاوية معلومة باستعمال الآلة الحاسبة، أو إيجاد قياس الزاوية إذا عُلِمت نسبتها المثلثية.
- أُنشِئ فريقين يتكوَّن كلٌّ منهما من أربعة متسابقين.
- أطلب إلــى أفراد كل فريــق ســحب 4 بطاقات من الصندوق، ثم حل الأسئلة المكتوبة عليها.
- الفريق الفائز هو مَنْ يحل أكبر عدد من الأسئلة بصورة صحيحة.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\cos 270°$ 0 2) $\tan 120°$ $-\sqrt{3}$ 3) $\tan 315°$ -1

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

4) $\sin 130°$ ≈ 0.766 5) $\sin 325°$ ≈ -0.574 6) $\cos 250°$ ≈ -0.342

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ $0°$ وَ $360°$، لها نسبةُ الجيبِ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

7) $325°$ $215°$ 8) $84°$ $96°$ 9) $245°$ $295°$

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ $0°$ وَ $360°$، لها نسبةُ جيبِ التمامِ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

10) $280°$ $80°$ 11) $150°$ $210°$ 12) $215°$ $145°$

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ $0°$ وَ $360°$، لها نسبةُ الظلِّ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

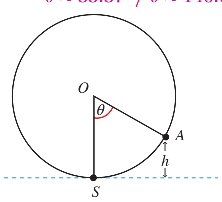
13) $75°$ $255°$ 14) $300°$ $120°$ 15) $235°$ $55°$

أَجِدُ في ما يأتي قيمةَ (أوْ قيمَ) θ، علمًا بـأنَّ $0° \leq \theta \leq 360°$:

16) $\sin \theta = 0.55$ $\theta \approx 33.37° \;/\; \theta \approx 146.63°$

17) $\cos \theta = -0.05$ $\theta \approx 92.87° \;/\; \theta \approx 267.13°$

18) $\tan \theta = 0$ $\theta = 0° \;/\; \theta = 180°$



19) **ترفيهٌ:** يُمثِّلُ الشكلُ الآتي دولابًا دوّارًا في مدينةِ ألعابٍ يدورُ بسرعةٍ ثابتةٍ، وتُمثِّلُ S في الشكلِ نقطةَ صعودِ الراكبِ الذي موقعُهُ الآنَ عندَ النقطةِ A، في حينِ تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ الـدولابِ. إذا دارَ الدولابُ بزاويةِ θ، فإنَّ ارتفـاعَ الراكبِ عنِ الأرضِ (h) بالأمتارِ يُعطى بالعلاقةِ: $h = 12.5 - 12.5 \cos \theta$. أَجِدُ ارتفاعَ الراكبِ عن سـطحِ الأرضِ عندما تصبحُ $\theta = 345°$.   0.43 m تقريبًا

20) أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.   أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

21) **تحدٍّ:** أَجِدُ مجموعةَ قيمِ θ التي تجعلُ المتباينةَ الآتيةَ صحيحةً، علمًا بأنَّ $90° < \theta < 180°$:

$\cos \theta + \sin \theta < 0$ أنظر ملحق الإجابات.

22) **أكتشفُ الخطأَ:** حسبَتْ سندسُ نسبةَ جيبِ إحدى الزوايا في الربعِ الثاني، فكانَتْ قيمتُها 1.4527 هلْ إجابةُ سندسَ صحيحةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.   أنظر ملحق الإجابات.

23) **تبريرٌ:** أَجِدُ قيمةَ ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

$\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \ldots\ldots + \cos 357° + \cos 358° + \cos 359° + \cos 360°$

أنظر ملحق الإجابات.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 7, 9, 11, 13, 15 كتاب التمارين: (1 – 12),15,16, 18, 20, 22, (24 – 26)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 8, 10, 12, 14, 19 كتاب التمارين: (13 – 15), 17, 21, 23, 27, 28
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (19 – 23) كتاب التمارين: 13, 14,19, (28– 32)

الدرسُ 3

تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ
Graphing Trigonometric Functions

فكرةُ الدرسِ تمثيلُ اقتراناتٍ مثلثيةٍ مجالُها الفترةُ [0º, 360º] بيانيًّا.

مسألةُ اليومِ يرتبطُ عمقُ الماءِ عندَ نقطةٍ مُعيَّنةٍ في أحدِ الموانئِ بالزمنِ حسبَ العلاقةِ:

$$y = \sin x, x \geq 0$$

حيثُ: y عمقُ الماءِ بالأمتارِ، وَ x الزمنُ بالساعاتِ بعدَ منتصفِ الليلِ. هلْ يُمكِنُ رسمُ منحنى يُبيِّنُ تغيُّرَ عمقِ الماءِ في الميناءِ معَ مرورِ الوقتِ؟

تُستخدَمُ الاقتراناتُ المثلثيةُ في تمثيلِ مواقفَ حياتيةٍ مرتبطةٍ بالحركةِ الدوريةِ، مثلِ: موجاتِ الصوتِ، وضغطِ الدمِ في جسمِ الإنسانِ، وارتفاعِ مقعدٍ في دولابٍ دوّارٍ، وتغيُّرِ عددِ ساعاتِ النهارِ خلالَ عامٍ، وغيرِ ذلكَ. ولكنْ، هلْ يُمكِنُ رسمُ منحنى اقترانٍ يُبيِّنُ كيفَ تبدو الحركةُ الدوريةُ التي تُمثِّلُها هذهِ الاقتراناتُ؟

تعلَّمْتُ سابقًا كيفيةَ تمثيلِ اقتراناتٍ خطِّيةٍ وتربيعيةٍ في المستوى الإحداثيِّ بإنشاءِ جدولِ قيمٍ للمُتغيِّريْنِ x وَ y، وتمثيلِ كلِّ زوجٍ (x, y) بنقطةٍ في المستوى، ثمَّ رسمِ المنحنى الذي يصلُ هذهِ النقاطَ ببعضِها. وفي هذا السياقِ، يُمكِنُ اتِّباعُ الطريقةِ نفسِها لتمثيلِ الاقتراناتِ المثلثيةِ.

مثال 1

أرسمُ منحنى كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ ثم أَصِفُهُ، علمًا بأنَّ $0º \leq x \leq 360º$:

1 $y = \sin x$

الخطوةُ 1: أُكوِّنُ جدولًا أكتبُ فيهِ زوايا شائعةً، نسبُها المثلثيةُ معروفةٌ، مثلَ: الزوايا الربعيةِ، والزوايا التي زاويتُها المرجعيةُ 30º.

الخطوةُ 2: أجدُ قيمةَ $\sin x$ لكلِّ زاويةِ x، ثمَّ أكتبُها في الجدولِ:

الدرس 3

نتاجات الدرس

- تمثيل اقتران الجيب في الفترة [0°, 360°] بيانيًّا.
- تمثيل اقتران جيب التمام في الفترة [0°, 360°] بيانيًّا.
- تمثيل اقتران الظل في الفترة [0°, 360°] بيانيًّا.
- تعرف خصائص الاقترانات المثلثية الأساسية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تمثيل الاقترانات بيانيًّا.
- النسب المثلثية الأساسية للزوايا الحادة.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » مَنْ يذكر بعض أنواع الاقترانات؟ اقتران خطي، اقتران تربيعي، اقتران أسي.
  - » ماذا يعني التمثيل البياني للاقتران؟ إجابة مُحتمَلة: رسم منحنى يُمثِّل الاقتران.
  - » كيف نُمثِّل منحنى الاقتران $y = x^2$ بيانيًّا؟
- أُذكِّر الطلبة بكيفية استعمال جداول القِيَم لتمثيل الاقترانات الخطية والاقترانات التربيعية، ثم تعيين النقاط باستعمال أزواج مرتبة في المستوى الإحداثي، والتوصيل بينها بمستقيم في حالة الاقترانات الخطية، وبمنحنى متصل في حالة الاقترانات التربيعية.
- أسأل الطلبة:
  - » ما أصغر قيمة للاقتران $y = x^2$؟ $y = 0$
  - » ما أكبر قيمة له؟ لا توجد.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » هل يتغيَّر عمق الماء بمرور الزمن؟ نعم.
  - » ما أكبر قيمة لجيب الزاوية؟ ما قياس الزاوية عندئذٍ؟ $1, \theta = 90°$
  - » ما أصغر قيمة لجيب الزاوية؟ ما قياس الزاوية عندئذٍ؟ $-1, \theta = 270°$
  - » هل يمكن رسم منحنى يُمثِّل اقتران الجيب؟
  - » أيُّكم يتوقع شكل هذا المنحنى؟
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

3 التدريس

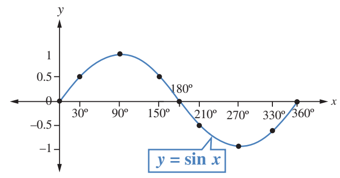
- أُعرِّف الاقترانات المثلثية بأنَّها اقترانات تحوي نسبة مثلثية واحدة على الأقل، مثل: sin، أو cos، أو tan، وأنَّها تُستعمَل لنمذجة العديد من المواقف الحياتية، مثل: ضغط الدم، وارتفاع مقعد على لعبة دولاب دوّار، وجهد الإشارات الإلكترونية.
- أُشير إلى أنَّه لتمثيل الاقترانات المثلثية يمكن اتباع الإجراءات نفسها المستعملة لتمثيل الاقترانات الخطية أو التربيعية.

ملاحظاتي

x	0º	30º	90º	150º	180º	210º	270º	330º	360º
$y=\sin x$	0	0.5	1	0.5	0	– 0.5	–1	– 0.5	0

الخطوةُ 3: أُعيِّنُ الأزواجَ المُرتَّبَةَ: $(0º, 0), (30º, 0.5), (90º, 1), \ldots\ldots (360º, 0)$ في المستوى الإحداثيِّ.

الخطوةُ 4: أَصِلُ بمنحنًى أملسَ بينَ النقاطِ، فينتجُ رسمٌ كما في الشكلِ المجاورِ.



منَ التمثيلِ البيانيِّ لاقترانِ $\sin x$، أُلاحِظُ أنَّ:

- أكبرَ قيمةٍ للاقترانِ $\sin x$ هيَ 1، وأصغرَ قيمةٍ لهُ هيَ –1
- $\sin x$ يكونُ موجبًا إذا كانَتْ $0º < x < 180º$، وسالبًا إذا كانَتْ $180º < x < 360º$.

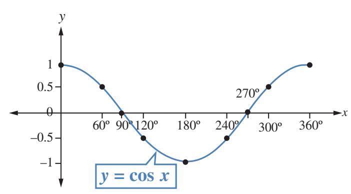
2 $y = \cos x$.

الخطوةُ 1: أُكوِّنُ جدولًا أكتبُ فيهِ زوايا شائعةً.

الخطوةُ 2: أجِدُ قيمةَ $\cos x$ لكلِّ زاويةٍ x، ثمَّ أكتبُها في الجدولِ:

x	0º	60º	90º	120º	180º	240º	270º	300º	360º
$y=\cos x$	1	0.5	0	–0.5	–1	– 0.5	0	0.5	1

الخطوةُ 3: أُعيِّنُ الأزواجَ المُرتَّبةَ: $(0º, 1), (60º, 0.5), (90º, 0), \ldots\ldots (360º, 1)$ في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَ النقاطِ بمنحنًى أملسَ.



منَ التمثيلِ البيانيِّ لاقترانِ $\cos x$، أُلاحِظُ أنَّ:

- أكبرَ قيمةٍ للاقترانِ $\cos x$ هيَ 1، وأصغرَ قيمةٍ لهُ هيَ –1

أُفكِّرُ

ما العلاقةُ بينَ منحنى اقترانِ الجيبِ والزوايا المرجعيةِ التي تعلَّمْتُها في الدرسِ السابقِ؟

إرشادٌ

يُمكِنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لتمثيلِ الاقترانِ $\cos x$، وملاحظةِ أكبرِ قيمةٍ لهُ، وأصغرِ قيمةٍ لهُ أيضًا.

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، وأُبرِّر لهم سبب اختيار الزاوية 30° بوصفها زاوية مرجع في الفرع الأوَّل، واختيار الزاوية 60° بوصفها زاوية مرجع في الفرع الثاني، مُذكِّرًا الطلبة بالخصائص التي يمكن ملاحظتها في كل تمثيل بياني.

في الفرع الأوَّل:

- أطلب إلى الطلبة تحديد التماثل في منحنى الجيب بدراسة كلٍّ من المنحنى والجدول.
- أطلب إلى الطلبة توضيح الفرق بين التماثل الحاصل في منحنى الجيب حول 90°، وحول 180°.

في الفرع الثاني:

- أطلب إلى الطلبة تحديد التماثل في منحنى جيب التمام بدراسة كلٍّ من المنحنى والجدول.
- أطلب إلى الطلبة توضيح الفرق بين التماثل الحاصل في منحنى جيب التمام حول 180°.
- أطلب إلى الطلبة وصف منحنى جيب التمام وعلاقته بمنحنى الجيب وأتذكَّر أنَّه إذا أدرك الطلبة هذه العلاقة فسيجيبون بأنَّ منحنى جيب التمام هو منحنى الجيب نفسه مع انسحاب بمقدار 90° نحو اليمين.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

إرشادات:

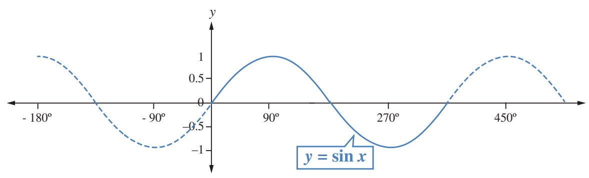
- أُوجِّه الطلبة إلى أهمية تقسيم المحور الأفقي أقسامًا متساوية بالزوايا، وكذلك المحور الرأسي، ولكن بالأعداد، ثم أطلب إليهم تفسير ذلك.
- أُخبِر الطلبة أنَّ معرفة أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران المثلثي الذي يتضمَّن sin أو cos تساعد على تمثيل هذا الاقتران.
- أتذكَّر أنَّ تعزيز قدرة الطلبة على ملاحظة التماثلات الحاصلة لمنحنى الجيب حول زوايا مُحدَّدة يساعدهم على فهم النسب المثلثية للزوايا بين 0° و 360°، فيفهمون – مثلًا– أنَّ $\sin 30°=0.5=\sin(180-30)°$.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكنهم الاستعانة بمضاعفات الزاوية 30°، مثل: 60°، 90°، 120°، 150°، بدءًا بالزاوية التي قياسها 0° عند تمثيل اقتران الجيب، وأنَّه عند تمثيل الزوج المرتب $(60°, \sin60°)$ – مثلًا– تُستعمَل الآلة الحاسبة، ويُقرَّب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ إلى 0.87

- $\cos x$ يكونُ موجبًا إذا كانَتْ $0° < x < 90°$، وَ $270° < x < 360°$، وسالبًا إذا كانَتْ $90° < x < 270°$.

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

أرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \sin x$، علمًا بأنَّ $90° \le x \le 360°$، مُستعمِلًا زوايا مختلفةً عنْ تلكَ التي في الجدولِ السابقِ، ثمَّ أَجِدُ قيمَ الجيبِ لهذهِ الزوايا باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

تعرَّفْتُ أنَّهُ توجدُ زوايا أكبرُ منْ $360°$. فإذا دارَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ (في الوضعِ القياسيِّ) أكثرَ منْ دورةٍ واحدةٍ عكسَ اتجاهِ عقاربِ الساعةِ، فإنَّهُ يُكوِّنُ زوايا أكبرَ من $360°$، وإذا دارَ معَ اتجاهِ عقاربِ الساعةِ، فإنَّهُ يُكوِّنُ زوايا قياسُها سالبٌ؛ ولهذا، فقدْ يكونُ قياسُ الزاويةِ أيَّ عددٍ حقيقيٍّ، علمًا بأنَّهُ يُمكِنُ تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ للأعدادِ الحقيقيةِ جميعِها، وليسَ فقطْ للزوايا الواقعةُ بينَ $0°$ وَ $360°$، أُلاحِظُ منحنى اقترانِ الجيبِ الآتي.



كاشفُ الاهتزازِ (الأوسيليسكوبُ) هوَ جهازٌ يرسمُ جُهْدَ الإشاراتِ الإلكترونيةِ على شكلِ مُخطَّطٍ يُشْبِهُ التمثيلَ البيانيَّ لاقترانِ الجيبِ، ويُستعمَلُ لاكتشافِ أعطالِ الأجهزةِ الكهربائيةِ.

والآنَ، سأرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \tan x$، مُلاحِظًا الفرقَ بينَهُ وبينَ منحنيَي الاقترانيْنِ $\sin x$، وَ $\cos x$.

مثال 2

أرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \tan x$، ثمَّ أَصِفُهُ علمًا بأنَّ $0° \le x \le 360°$:

الخطوةُ 1: أُكوِّنُ جدولًا، ثمَّ أكتبُ فيهِ زوايا شائعةً.

الخطوةُ 2: أَجِدُ قيمةَ $\tan x$ لكلِّ زاويةٍ x، ثمَّ أكتبُها في الجدولِ:

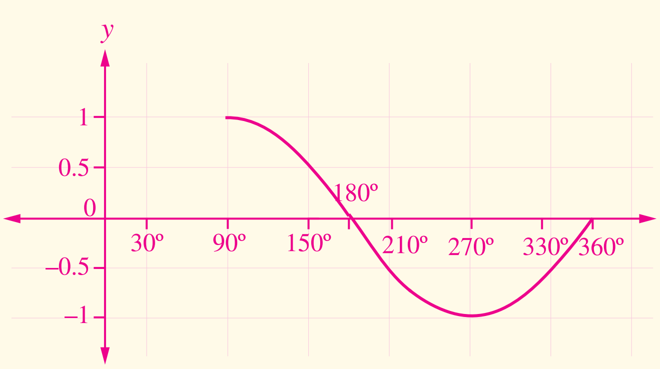
x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$\tan x$	0	1	غيرُ مُعرَّفٍ	−1	0	1	غيرُ مُعرَّفٍ	−1	0

96

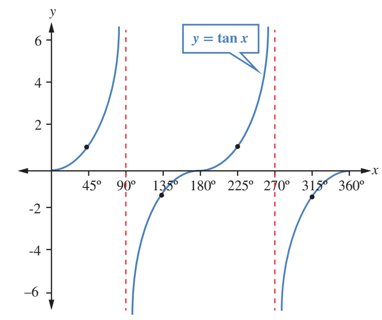
مثال 2

- أوضِّح للطلبة أنَّه يمكن تمثيل الاقترانات المثلثية على جميع الأعداد الحقيقية، ولكن ليس -بالضرورة- ضمن فترة مغلقة، أو ضمن دورة واحدة، حيث: $0° \le \theta \le 360°$، ولذلك تُسمّى هذه الاقترانات الاقترانات الدائرية أو الدورية Cyclic Functions؛ إذ يتكرَّر المنحنى الذي يظهر ضمن دورة واحدة على مجال هذه الاقترانات، وهو الأعداد الحقيقية $(-\infty,\infty)$.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2، مُؤكِّدًا أهمية تحديد خطوط التقارب الرأسي Vertical Asymptotes (خطوط متقطعة) قبل تعيين النقاط، ورسم منحنى $y = \tan x$.
- أُبيِّن للطلبة أنَّ منحنى اقتران الظل يكون غير متصل عند الزوايا التي ليس له تعريف عندها؛ أيْ عند $90°$ و $270°$، وأنَّه بموازاة خطوط التقارب الرأسية يمتد منحنى الظل في الاتجاهين: إلى $+\infty$ في الربعين: الأوَّل والثالث، وإلى $-\infty$ في الربعين: الثاني والرابع.

إجابة التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 1):



الخطوةُ 3: أُعيِّنُ النقاطَ في المستوى الإحداثيِّ، مُلاحِظًا صعوبةَ التوصيلِ بينَ النقاطِ بمنحنًى واحدٍ؛ لأنَّ قيمةَ $\tan x$ غيرُ مُعرَّفةٍ للزاويتيْنِ 90° وَ 270°؛ لذا أَصِلُ النقاطَ قبلَ الزاويةِ 90° ببعضِها، والنقاطَ بينَ الزاويتيْنِ 90° وَ 270° ببعضِها، والنقاطَ بعدَ الزاويةِ 270° ببعضِها، فينتجُ رسمٌ كما في الشكلِ الآتي.



أتعلَّمُ

يُسمّى كلٌّ منَ المستقيميْنِ $x = 90^\circ$ وَ $x = 270^\circ$ خطَّ تقاربٍ رأسيٍّ لمنحنى $\tan x$؛ لأنَّ المنحنى يقتربُ كثيرًا منْهُما، لكنَّهُ لا يقطعُهُما.

يُبيِّنُ الشكلُ أنَّ منحنى $\tan x$ غيرُ متصلٍ؛ فهوَ مُكوَّنٌ منْ عِدَّةِ قطعٍ، وأنَّ الظلَّ موجبٌ بينَ الزاويتيْنِ 0° وَ 90°، وبينَ الزاويتيْنِ 180° وَ 270°، وأنَّهُ يكونُ سالبًا بينَ الزاويتيْنِ 90° وَ 180°، وبينَ الزاويتيْنِ 270° وَ 360°.

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

أرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \tan x$، علمًا بأنَّ $90^\circ < x < 270^\circ$، مُستعمِلًا زوايا مختلفةً عنْ تلكَ التي في الجدولِ السابقِ، ثمَّ أَجِدُ قيمَ الظلِّ لهذهِ الزوايا باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

أتدرب وأحل المسائل

أرسمُ منحنى الاقترانِ لكلٍّ ممّا يأتي في الفترةِ المعطاةِ، ثمَّ أَصِفُهُ: 1–4 أنظر ملحق الإجابات.

1) $y = \sin x \quad 0^\circ \le x \le 270^\circ$

2) $y = \cos x \quad 0^\circ \le x \le 180^\circ$

3) $y = \sin x \quad 0^\circ \le x \le 180^\circ$

4) $y = \tan x \quad 0^\circ \le x \le 180^\circ$

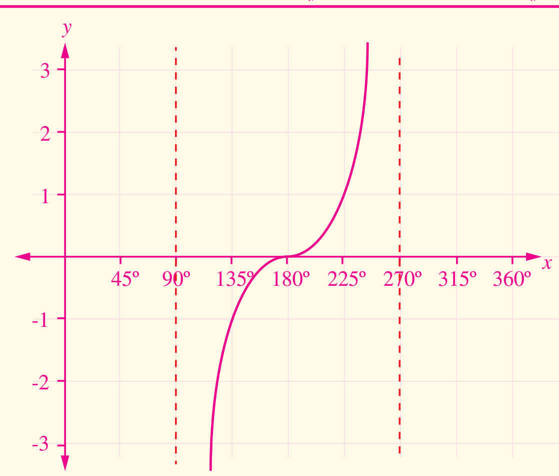
97

4 التدريب

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (4–1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

إجابة التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 2):



مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (15 – 14).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية مــن الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

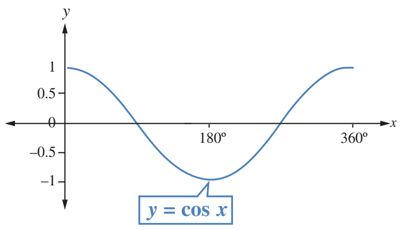
الواجب المنزلي:

أســتعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (8 – 5) كتاب التمارين: (4–1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (12 – 9) كتاب التمارين: 4, 5
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (15 – 9) كتاب التمارين: (7 – 5)

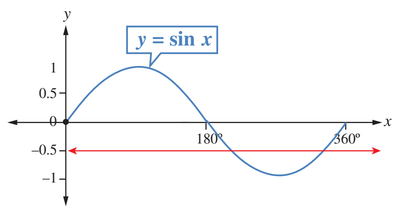
5 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \cos x$. بناءً على هذا الشكلِ، أُقدِّرُ قيمتيْنِ للمُتغيِّرِ x يكونُ عندَهُما $\cos x = -0.5$

$120°, 240°$



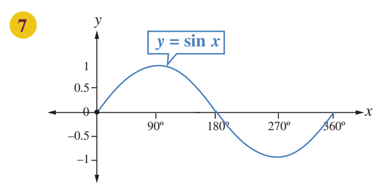
6 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \sin x$. بناءً على هذا الشكلِ، أُقدِّرُ قيمتيْنِ للمُتغيِّرِ x يكونُ عندَهُما $\sin x = -0.5$

$210°, 330°$



أستعملُ التمثيلاتِ البيانيةَ الآتيةَ لأَجِدَ جميعَ القيمِ الممكنةِ لكلٍّ مِن: a, b, c, d, e, f, g, h.

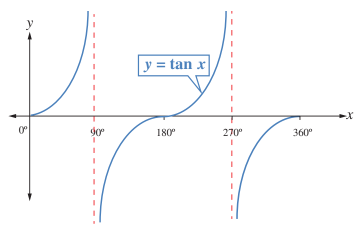
7



$\sin 0° = \sin a° = \sin b°$
$\sin 30° = \sin c°$
$\sin 60° = \sin d°$
$\sin 210° = \sin e°$

$a = 180°, b = 360°, c = 150°, d = 120°, e = 330°$

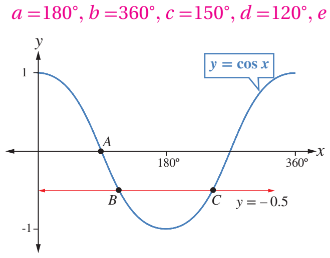
8



$\tan 0° = \tan e° = \tan f°$
$\tan 45° = \tan g°$
$\tan 60° = \tan h°$

$e = 180°, f = 360°, g = 225°, h = 240°$

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \cos x$ الذي يقطعُهُ المستقيمُ $y = -0.5$ في النقطتيْنِ B, C:



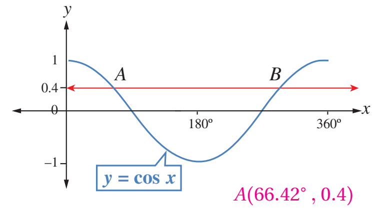
9 أَجِدُ إحداثياتِ النقطةِ A. $A(90°, 0)$

10 أَجِدُ إحداثياتِ النقطتيْنِ B, C باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

$B(120°, -0.5)$
$C(240°, -0.5)$

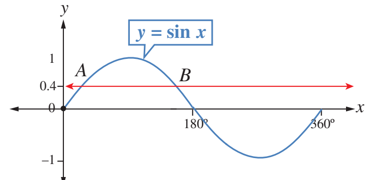
أَجِدُ إحداثياتِ النقطتيْنِ A و B في كلِّ شكلٍ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ:

12



$A(66.42°, 0.4)$
$B(293.58°, 0.4)$

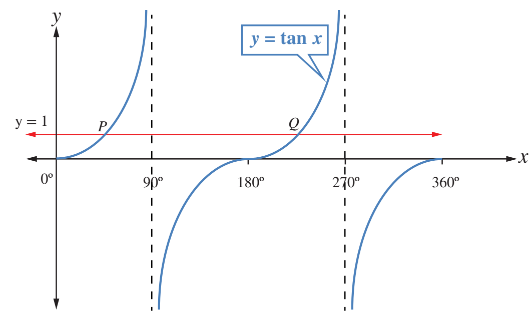
11



$A(23.58°, 0.4)$
$B(156.42°, 0.4)$

13 يُبيِّنُ الشكلُ الآتي جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \tan x$، حيثُ يقطعُ المستقيمُ $y = 1$ منحنى $y = \tan x$ في النقطتيْنِ: P، وَ Q. أكتبُ الإحداثيَّ x لكلٍّ منَ النقطتيْنِ: P، وَ Q.

$P(45°, 1)$
$Q(225°, 1)$



مهاراتُ التفكيرِ العليا

14 **تحدٍّ**: أرسمُ منحنيَي الاقترانيْنِ $y = \cos x$ وَ $f = 2\cos x$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، في الفترةِ $0° \leq x \leq 360°$، ثمَّ أُقارِنُ بينَهُما. أنظر ملحق الإجابات.

15 **أكتبُ**: ما الفرقُ بينَ منحنيَي الجيبِ وجيبِ التمامِ؟
ستتنوَّع إجابات الطلبة.

5 الإثراء

- أُوجِّه الطلبة ذوي المستوى فوق المتوسط إلى البحث عن صورة لتطبيق حياتي يمكن تمثيله في صورة اقتران الجيب، والتقاط صورة له، ثم استعمال برنامج جيوجبرا وما تعلَّموه في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة الأولى لإيجاد قاعدة الاقتران، وتوثيق ذلك بالصور، ثم أعرضه أمام زملائهم في الصف.

نشاط التكنولوجيا:

لتوضيح مفهوم الاقتران الدائري باستعمال برمجية جيوجبرا، أتَّبِع الآتي:

- أُدخِل $f(x) = \sin(x)$ في Input bar، ثم أضبط تدريج المحور x لنظام الزوايا.
- أضع نقطة على المنحنى الذي ظهر رسمه. ومن خصائصها، أختار Show Trace.
- أختار من خصائص، النقطة Animation On.

تعليمات المشروع:

- أُوجِّه الطلبة إلى متابعة تنفيذ الخطوة الثانية من خطوات المشروع.
- أُذكِّر أفراد كل مجموعة بأنَّه يتعيَّن عليهم الانتهاء من إعداد المُدوَّنة (الإلكترونية)، أو (المنشور الورقي) الذي يُوضِّح أعمال المجموعة في أثناء تنفيذ المشروع، ونقاشاتها عن موضوع مشروع الوحدة، وتلخيص النتائج التي توصَّلوا إليها.

6 الختام

- أكتب السؤالين الآتيين على اللوح، ثم أطلب إلى كل طالب/ طالبة الإجابة عنهما – في 3 دقائق – في ورقة، ويكتب عليها اسمه:
  » ما الاقتران المثلثي؟
  » أُقارِن بين اقتراني الجيب وجيب التمام، مُبيِّنًا خصائص كلٍّ منهما بعباراتي الخاصة.
- أجمع الأوراق، ثم أقرأها خارج غرفة الصف، مُقدِّمًا التغذية الراجعة لمَنْ يحتاج إليها في الحصة التالية.

الدرس 4

نتاجات الدرس

- حل معادلات تتضمَّن النسب المثلثية $(\sin, \cos, \tan)$، وتكون مجموعة الحل ضمن الدورة الواحدة.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- حل المعادلات الخطية.
- حل المعادلات التربيعية بالتحليل.
- قوانين الأسس.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أطلب إلى الطلبة تعريف المعادلة، وأذكر أمثلة عليها، ثم أناقِشهم في ذلك.
  - » أكتب معادلة خطية ومعادلة تربيعية يمكن حلهما بالتحليل، ثم أطلب إلى الطلبة حلهما.
  - » أُذكِّر الطلبة بالمهارات المتعلقة بتحليل العبارة التربيعية.
  - » أكتب على اللوح المعادلة: $4\sin^2\theta = 3$، ثم أسأل الطلبة:
  - » هل هذه معادلة؟ نعم.
  - » فيمَ تختلف هذه المعادلة عن المعادلة التربيعية؟ ستتنوَّع إجابات الطلبة.
  - » ماذا تتوقعون أن تتعلموا في هذا الدرس؟ ستتنوَّع إجابات الطلبة.
- أمنح الطلبة (2–3) دقائق لتقديم إجاباتهم عن السؤال الأخير، وأستمع لهم من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

الدرس 4

حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ
Solving Trigonometric Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ معادلاتٍ تتضمَّنُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ، وتكونُ فيها مجموعةُ الحَلِّ ضمنَ دورةٍ واحدةٍ.

المصطلحاتُ المعادلةُ المثلثيةُ.

مسألةُ اليومِ ساعةُ حائطٍ كبيرةٌ مُعلَّقةٌ على جدارِ غرفةٍ. إذا كانَ طولُ عقربِ الساعاتِ فيها 16 cm، وبُعْدُ رأسِ العقربِ عنْ سقفِ الغرفةِ يُمثَّلُ دائمًا بالعلاقةِ: $d = -60\cos(30x) + 110$، حيثُ: d البُعْدُ بالسنتيمترِ، وَ x الوقتُ بالساعاتِ، فما الوقتُ الذي يبعدُ فيهِ رأسُ عقربِ الساعاتِ 118 cm عنِ السقفِ؟

المعادلةُ المثلثيةُ (trigonometric equation) هيَ معادلةٌ مُتغيِّراتُها نسبٌ مثلثيةٌ لزاويةٍ مجهولةٍ. وحَلُّ المعادلةِ المثلثيةِ يعني إيجادَ الزاويةِ (أوِ الزوايا) التي تُحقِّقُ هذهِ المعادلةَ، وتجعلُ منْها عبارةً صحيحةً.

منَ الأمثلةِ على المعادلاتِ المثلثيةِ:

$2\sin^2 x = 3$ $\quad$ $2 + \cos x = 3 - 2\cos x$ $\quad$ $\tan x = 2.435$ $\quad$ $\sin x = 0.5$

يُمكِنُ حَلُّ بعضِ المعادلاتِ، مثلِ: $\sin x = a$، وَ $\cos x = a$، باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوِ استعمالِ ما نتذكَّرُهُ منْ نسبِ الزوايا الخاصةِ.

مثال 1

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0° \le x \le 360°$:

1 $\mathbf{2\sin x = 1}$

$\sin x = \frac{1}{2}$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 2

$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

ولأنَّ الجيبَ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الثاني؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلةِ هوَ:

$180° - 30° = 150°$

إذنْ، لهذهِ المعادلةِ حَلّانِ ضمنَ الفترةِ المعطاةِ في المسألةِ، هما: 30°، وَ 150°.

أَتذكَّرُ
يكونُ جيبُ الزاويةِ موجبًا في الربعيْنِ: الأولِ، والثاني.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
  - » ماذا يمكن أنْ نُسمِّي العلاقة d؟ معادلة مثلثية.
  - » ما المجهول (أو المتغير المستقل) في هذه العلاقة؟ قياس الزاوية.
  - » هل تعتقد أنَّ حلها يشبه حل المعادلات التي سبق دراستها؟ نعم.
  - » أقترح طريقة لحلها. ستتنوَّع إجابات الطلبة.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

2 $3\cos x - 1 = 2$

$3\cos x = 3$ بإضافةِ 1 إلى الطرفيْنِ

$\cos x = 1$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 3

$x = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

لهذهِ المعادلةِ حَلّانِ ضمنَ الفترةِ المعطاةِ في المسألةِ، هما: 0°، وَ 360°

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$: أنظر الهامش.

a) $2\cos x = \sqrt{3}$

b) $2\tan x + 3 = 1$

يتطلَّبُ حَلُّ بعضِ المعادلاتِ مزيدًا منَ التبسيطِ والمعالجةِ قبلَ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

مثال 2

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ:

1 $2(\tan x - 3) + 4 = 12 , 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

$2\tan x - 6 + 4 = 12$ باستعمالِ الخاصيةِ التوزيعيةِ

$2\tan x = 14$ بالتبسيطِ

$\tan x = 7$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 2

$x = \tan^{-1}(7)$ تعريفُ معكوسِ الظلِّ

$x = 81.9^\circ$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

ولأنَّ الظلَّ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الثالثِ؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلةِ هوَ:

$180^\circ + 81.9^\circ = 261.9^\circ$

إذنْ، لهذهِ المعادلةِ حَلّانِ ضمنَ الفترةِ المعطاةِ في المسألةِ، هما: 81.9°، وَ 261.9°

أتذكَّرُ

الزاويةُ المرجعيةُ هيَ الزاويةُ المحصورةُ بينَ ضلعِ انتهاءِ الزاويةِ θ الحادةِ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ والمحورِ x.

إجابة التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 1):

a) $x = 30^\circ, x = 330^\circ$

b) $x = 135^\circ, x = 315^\circ$

3 التدريس

- أُقدِّم للطلبة مفهوم المعادلة المثلثية، ثم أعرض أمامهم مجموعة من الأمثلة عليه.
- أعرض أمام الطلبة أمثلة مُتنوِّعة من المعادلات (خطية، تربيعية، أسية، مثلثية، ...)، ثم أطلب إليهم تصنيفها.
- أعرض أمام الطلبة المثال 1، ثم أُناقِشهم في حله، وأسألهم قبل بدء الحل:
  » كم عدد الحلول المحتملة للمعادلة في الفرع الأوَّل؟ لماذا؟ يوجد حلان؛ لأنَّ الجيب موجب في الربعين: الأوَّل، والثاني.
- أُنبِّه الطلبة إلى استعمال مفهوم معكوس النسبة المثلثية، مثل:
  » للمعادلات المثلثية البسيطة، مثل: $\cos\theta = 0.5$، أستعمل مفهوم معكوس النسبة المثلثية، وأكتب: $\theta = \cos^{-1}(0.5)$.
- أُنبِّه الطلبة إلى وجود حلين للمعادلة المثلثية ضمن الدورة الواحدة مُبيِّنًا لهم سبب ذلك.
- أتحقَّق من صحة الحل بتعويض الحلين (الزاويتين) في المعادلة المثلثية.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

إرشاد: أُوجِّه الطلبة إلى التحقُّق دائمًا من صحة الحل، وأُذكِّرهم بأنَّ بعض المعادلات المثلثية يمكن حلها اعتمادًا على ما نعرفه من النسب المثلثية للزوايا الخاصة ومفهوم زاوية المرجع، في حين يتطلب حل بعض المعادلات المثلثية تبسيطها قبل استعمال الآلة الحاسبة وتوظيف مفهوم معكوس النسبة المثلثية كما تعلَّموا سابقًا.

مثال 2

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2، وأُذكِّرهم بمفهوم معكوس النسبة المثلثية، ومفهوم زاوية المرجع.
- أُبرِّر للطلبة استعمال θ بدلًا من $3x$ (لتسهيل الحل) في الفرع 2 من المثال 2، وأحرص على التوضيح للطلبة كيفية تغيُّر المجال في حالة الاستبدال.
- أتأكَّد من امتلاك الطلبة المهارات المتعلقة باستعمال الآلة الحاسبة لإيجاد معكوس النسبة المثلثية.

أخطاء شائعة:

قد يُخطِئ بعض الطلبة في حل المعادلات، مثل $\sin(2x) = 1$، فيقسمون طرفي المعادلة على العدد 2؛ لذا أُخبِرهم أنَّه يمكن حلها باستعمال θ بدلًا من $2x$، وأُذكِّرهم بضرورة التحقُّق من صحة الحل.

مثال إضافي:

» أحل المعادلات الآتية علمًا بأنّ $0° \le x < 360°$

1. $\cos(2x) = -0.5$
2. $\sin(4x) - 1 = 0$
3. $1 + 4\cos(3x) = -2$

إرشاد: أُخبِر الطلبة أنَّه قد يُطلَب في السؤال درجة مُحدَّدة من دقة التقريب يجب مراعاتها، وأنَّه في حال عدم تحديد دقة التقريب في السؤال فستُقرَّب الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.

تنويع التعليم:

قد لا يهتم الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط بضبط الآلة الحاسبة على نظام الدرجات، أو يعانون صعوبة في ذلك، أو في استعمالها لإيجاد معكوس النسب المثلثية؛ لذا أُقدِّم لهم المساعدة اللازمة فرادى، مراعيًا اختلاف مُسمَّيات بعض المفاتيح بحسب نوع الآلة الحاسبة.

---

2 $1 + 4\sin(3x) = 2.5,\ 0° \le x \le 90°$

$4\sin(3x) = 2.5 - 1$ بطرحِ 1 منَ الطرفيْنِ

$\sin(3x) = \frac{1.5}{4}$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 4

$\sin\theta = \frac{1.5}{4} = 0.375$ باستعمالِ الرمزِ θ بدلًا منْ $3x$، حيثُ: $0° \le \theta \le 270°$

$\theta = \sin^{-1}(0.375)$ تعريفُ معكوسِ الجيبِ

$\theta = 22°$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$22° = 3x \Rightarrow x = 7.3°$

ولأنَّ الجيبَ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الثاني؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلةِ هوَ:

$180° - 22° = 158°$ الزاويةُ في الربعِ الثاني

$\theta = 3x = 158°$ بالتعويضِ

$x \approx 52.7°$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 3

إذنْ، للمعادلةِ $1 + 4\sin(3x) = 2.5$ حلّانِ ضمنَ الفترةِ المعطاةِ في المسألةِ، هما: $7.3°$، وَ $52.7°$

معلومةٌ أساسيةٌ

إذا كانَتْ $0° \le x \le 90°$، فإنَّ $0° \le 3x \le 270°$

أتحقق من فهمي

أحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ: أنظر الهامش.

a) $3(\sin x + 2) = 3 - \sin x,\ 0° \le x \le 360°$

b) $3\cos(2x) - 1 = 0,\ 0° \le x \le 180°$

يُمكِنُ حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ التربيعيةِ بطرائقَ مشابهةٍ لطرائقِ حَلِّ المعادلاتِ التربيعيةِ الجبريةِ، أبرزُها: إيجادُ العاملِ المشتركِ، والتحليلُ إلى ناتجِ ضربِ قوسيْنِ، وغيرُ ذلكَ منَ الطرائقِ التي تعرَّفْناها سابقًا.

إجابة التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 2):

a) $x \approx 228.590°,\ x \approx 311.409°$

b) $x \approx 35.265°,\ x \approx 144.735°$

مثال 3

أحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x < 360^\circ$:

1 $3 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0$

تحوي هذهِ المعادلةُ نسبتيْنِ مثلثتيْنِ، ويُلاحَظُ أنَّ $\sin x$ تكرَّرَ في حَدَّيِ المعادلةِ، ما يعني أنَّها تُشْبِهُ المعادلةَ $3yz - 2y = 0$؛ لذا يُمكِنُ تحليلُها بإخراجِ عاملٍ مشتركٍ:

$\sin x (3 \cos x - 2) = 0$ بإخراجِ العاملِ المشتركِ $\sin x$

$3 \cos x - 2 = 0 , \sin x = 0$ خاصيةُ الضربِ الصفريِّ

وبذلكَ أتوصَّلُ إلى معادلتيْنِ بسيطتيْنِ، ثمَّ أَحُلُّ كلَّ معادلةٍ على حِدَةٍ:

$\sin x = 0$ المعادلةُ الأولى

$x = 0^\circ, x = 180^\circ$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوْ جدولِ الزوايا الخاصةِ

$3 \cos x - 2 = 0$ المعادلةُ الثانيةُ

$3 \cos x = 2$ بإضافةِ 2 إلى الطرفيْنِ

$\cos x = \frac{2}{3}$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 3

$x = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ تعريفُ معكوسِ جيبِ التمامِ

$x = 48.2^\circ$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

ولأنَّ جيبَ التمامِ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الرابعِ؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلةِ هوَ:
$x = 360^\circ - 48.2^\circ = 311.8^\circ$

إذنْ، حلولُ هذهِ المعادلةِ هيَ: $0^\circ, 180^\circ, 48.2^\circ, 311.8^\circ$

أَتذكَّرُ

يكونُ جيبُ تمامِ الزاويةِ موجبًا في الربعيْنِ: الأولِ، والرابعِ.

2 $3 \sin^2 x = 2 \sin x + 1$

أجعلُ الطرفَ الأيمنَ منَ المعادلةِ صفرًا بطرحِ $(2 \sin x + 1)$ منَ الطرفيْنِ:

$3 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$

هذهِ المعادلةُ تُشْبِهُ المعادلةَ الجبريةَ $3y^2 - 2y - 1 = 0$؛ لذا يُمكِنُ حَلُّها بالتحليلِ إلى العواملِ:

$(3\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$ بالتحليلِ إلى العواملِ

$3 \sin x + 1 = 0 , \sin x - 1 = 0$ خاصيةُ الضربِ الصفريِّ

مثال 3

- أُناقِش الطلبة في فرعي المثال 3، مُذكِّرًا إيّاهم بطرائق تحليل العبارة التربيعية.
- أُركِّز في الفرع 1 من المثال 3 على مهارة إخراج العامل المشترك، وخاصية الضرب الصفري لحل المعادلة.
- أُذكِّر الطلبة بالمُميِّز في الفرع 2 من المثال 3، مُركِّزًا على تحليل العبارة التربيعية إلى حاصل ضرب قوسين، وأُذكِّرهم بإشارتي القوسين اعتمادًا على إشارتي الحد الأوسط والحد الأخير.
- أتحقَّق من صحة الحل بتعويض الحلول جميعها بالمعادلة الأصلية.

إرشاد: أُخبِر الطلبة أنَّه للتحقُّق من صحة الحل يجب التعويض في المعادلة الأصلية التي بدأنا حلها، وأنَّه لا يجوز التعويض بصورها المكافئة التي نحصل عليها في أثناء الحل؛ لأنَّ الاختصار قد يؤدي إلى إهمال بعض الحلول.

أخطاء مفاهيمية:

قد يُخطِئ بعض الطلبة في حل المعادلة، مثل: $\sin x \cos x + \sin x = 0$، فيقسمون على $\sin x$؛ لذا أُنبِّههم إلى الخطأ الذي وقعوا فيه، وألفت انتباههم إلى أنَّ ذلك يُؤثِّر في عدد حلول المعادلة الناتجة.

مثال 4: من الحياة

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 الذي يُنمذِج موقفًا حياتيًّا تُطبَّق فيه الحسابات المتعلقة بحل المعادلات المثلثية، مؤكِّدًا وجود العديد من المواقف الحياتية التي تُطبَّق فيها مثل هذه الحسابات. **(يمكن رسم شكل تقريبي على اللوح لمدفع الماء، ومسار القذيفة).**
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ الهدف من فرض $x = 2\theta$ هو تسهيل الحسابات.
- أتحقَّق من صحة الحل بالتعويض في المعادلة الأصلية.

المعادلةُ الأولى	$3\sin x + 1 = 0$
بطرحِ 1 منَ الطرفيْنِ	$3\sin x = -1$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 3	$\sin x = -\frac{1}{3}$
تعريفُ معكوسِ الجيبِ	$x = \sin^{-1}(-\frac{1}{3})$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، وتجاهلِ الإشارةِ السالبةِ	$x = 19.5^\circ$

يُمثِّلُ ما سبقَ الزاويةَ المرجعيةَ للحَلِّ، لا الحَلَّ نفسَهُ؛ لأنَّ الجيبَ سالبٌ في الربعيْنِ: الثالثِ، والرابعِ.

حَلُّ هذهِ المعادلةِ في الربعِ الثالثِ هوَ: $180^\circ + 19.5^\circ = 199.5^\circ$

وحَلُّها في الربعِ الرابعِ هوَ: $360^\circ - 19.5^\circ = 340.5^\circ$

والآنَ، أَحُلُّ المعادلةَ $\sin x - 1 = 0$:

بإضافةِ 1 إلى الطرفيْنِ	$\sin x = 1$
تعريفُ معكوسِ الجيبِ	$x = \sin^{-1}(1)$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوْ جدولِ الزوايا الخاصةِ	$x = 90^\circ$

إذنْ، حلولُ هذهِ المعادلةِ هيَ: $90^\circ, 199.5^\circ, 340.5^\circ$

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$: أنظر الهامش.

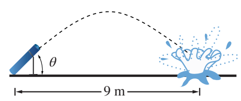
a) $4\sin x \tan x + 3\tan x = 0$

b) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

مثال 4: من الحياة

مِدْفعُ هواءٍ يميلُ عنِ الأرضِ بزاويةٍ قياسُها θ. انطلقَ منْ فُوَّهتِهِ بالونٌ مملوءٌ بالماءِ بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها 12 m/s، فسقطَ على بُعْدِ 9 m منَ المِدْفعِ. إذا كانَتِ العلاقةُ التي تُمثِّلُ المسافةَ الأفقيةَ d التي يقطعُها البالونُ هيَ:

$$d = \frac{1}{10} v^2 \sin 2\theta$$



حيثُ v سرعةُ البالونِ الابتدائيةُ، فما قيمةُ θ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ؟

104

إجابة التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 3):

a) $x = 0^\circ, x = 180^\circ, x \approx 228.59^\circ, x \approx 311.41^\circ$

b) $x = 0^\circ, x = 360^\circ, x = 60^\circ, x = 300^\circ$

4 التدريب

أتدرّب وأحلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (19 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

الخطوةُ 1: أُعوِّضُ القيمَ المعطاةَ في المسألةِ في المعادلةِ المعطاةِ، ثمَّ أَحُلُّها لإيجادِ قيمةِ θ.

عندَ تعويضِ القيمِ المعطاةِ، أتوصَّلُ إلى المعادلةِ: $9 = \frac{1}{10}(12)^2 \sin 2\theta$

الخطوةُ 2: لتسهيلِ الحساباتِ، أَفترضُ أنَّ $x = 2\theta$، ثمَّ أَحُلُّ المعادلةَ:

المعادلةُ	$9 = \frac{1}{10}(12)^2 \sin x$
بضربِ الطرفيْنِ في 10، والتبسيطِ	$90 = 144 \sin x$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 144	$\sin x = \frac{90}{144}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، والتقريبِ إلى أقربِ عُشْرٍ	$x = \sin^{-1}\frac{90}{144} = 38.7°$

الخطوةُ 3: أَجِدُ الحَلَّ الآخرَ في الربعِ الثاني، وهوَ: $180° - 38.7° = 141.3°$

الخطوةُ 4: أَجِدُ الآنَ قيمةَ θ:

العلاقةُ بينَ x وَ θ	$x = 2\theta$
بالقسمةِ على 2، والتعويضِ	$\theta = \frac{38.7°}{2} = 19.4°$ أو $\theta = \frac{141.3°}{2} = 70.7°$

إذنْ، يصنعُ المِدْفعُ معَ الأرضِ زاويةً قياسُها 19.4°، أوْ 70.7° تقريبًا.

الكهرباءُ موجودةٌ في جسمِ الإنسانِ أيضًا؛ فعضلاتُ القلبِ مثلًا تنقبضُ بتأثيرِ تياراتٍ كهربائيةٍ تصلُ إليها عبرَ العُقَدِ والوصلاتِ العصبيةِ.

أتحقق من فهمي

فيزياءُ: **فرقُ الجهدِ E (بالفولت) في دارةٍ كهربائيةٍ يُعطى بالعلاقةِ: $E = 20 \cos(180t)$، حيثُ t الزمنُ (بالثواني):** أنظر الهامش.

a) أَفترضُ أنَّ $x = 180\,t$، وأَحُلُّ المعادلةَ $12 = 20 \cos x$، علمًا بأنَّ $0° \le x \le 360°$.

b) أَجِدُ الزمنَ t (حيثُ $0 \le t \le 2$) عندما يكونُ فرقُ الجهدِ 12 volt، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ مئةٍ منَ الثانيةِ.

إجابة التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 4):

a) $x \approx 53.13°,\ x \approx 306.87°$

b) $t \approx 0.30,\ t \approx 1.70$

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (26 – 24).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية مـن الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (8 – 5) كتاب التمارين: (14 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 24 ,22 ,20 كتاب التمارين: (24 – 15)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (26 – 23) ,21 كتاب التمارين: (26 – 19)

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

1) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $x = 45°, x = 135°$

2) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $x = 30°, x = 210°$

3) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $x = 30°, x = 330°$

4) $7 + 9\cos x = 1$ $x \approx 131.81°, x \approx 228.19°$

5) $2\sin x + 1 = 0$ $x = 210°, x = 330°$

6) $1 - 2\tan x = 5$ $x \approx 116.57°, x \approx 296.57°$

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 90^\circ$:

7) $5 - 2\cos(4x) = 4$ أنظر ملحق الإجابات.

8) $3 + 4\tan(2x) = 6$ $x \approx 18.435°$

9) $13\sin(3x) + 1 = 6$ $x \approx 7.54°, x \approx 52.46°$

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، مُفترِضًا أنَّ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ يقعُ في الفترةِ $[0^\circ, 360^\circ]$:

10) $2(\sin x - 2) + 1 = 3\sin x$ ϕ

11) $\tan x - 3(2\tan x - 1) = 10$ $x \approx 125.54°, x \approx 305.54°$

12) $15\tan x - 7 = 5\tan x - 3$ $x \approx 21.80°, x \approx 201.80°$

13) $5(\cos x - 1) = 6 + \cos x$ ϕ

14) $\tan^2 x - 9\tan x + 20 = 0$ أنظر ملحق الإجابات.

15) $2\cos^2 x - \cos x = 0$ أنظر ملحق الإجابات.

16) $4\sin^2 x - 3\sin x = 1$ أنظر ملحق الإجابات.

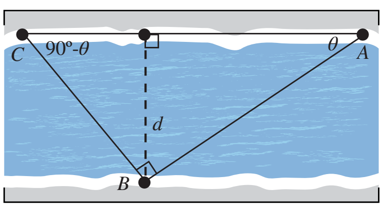
17) $2\sin^2 x - 1 = 0$ أنظر ملحق الإجابات.

18) $4\cos^2 x - 4 = 15\cos x$ $x \approx 104.48°,$ $x \approx 255.52°$

19) $\cos x = \sin x$ $x = 45°, x = 225°$

20) **ساعاتٌ:** أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. أنظر ملحق الإجابات.

21) **سِباحةٌ:** سبحَ حامدٌ مسافةَ 90 m منَ النقطةِ A على الضفةِ الشـــماليةِ لنهرٍ إلى النقطةِ B على الضفةِ المقابلةِ، ثمَّ دارَ بزاويةٍ قائمةٍ، وســبحَ مســافةَ 60 m إلــى نقطةٍ أُخرى C على الضفةِ الشــماليةِ. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ CAB هوَ θ، وقياسُ الزاويةِ ACB هوَ $(90^\circ - \theta)$، وطولُ العمودِ منَ B إلى CA يساوي عرضَ النهرِ d، فأُعبِّرُ عنْ d بدلالةِ θ مرَّةً، وبدلالةِ $(90^\circ - \theta)$ مرَّةً أُخـــرى، ثمَّ أَكتبُ معادلةً وأَحُلُّها لإيجادِ قيمةِ θ، ثمَّ أَجِدُ عرضَ النهرِ. أنظر ملحق الإجابات.



106

المفاهيم العابرة:

في أثناء حل الســؤال 24 في بند (**أكتشــف الخطأ**)، أُعزِّز الوعي **بالقضايا الإنسانية، وبناء الشــخصية** (احترام الآخر، وتقبُّله، والمرونة) عن طريــق التوضيح للطلبة أنَّ انتقاد حل شخص ما، أو الاختلاف معه في الرأي، لا يجب أنْ ينعكس على قبول هذا الشخص، وأنَّ النقد هو لسلوكه لا شخصه.

22 **دولابٌ**: يُعطى ارتفاعُ الراكبِ عنِ الأرضِ في دولابٍ دوّارٍ بالمعادلةِ: $h = 27 - 25\cos\theta$، حيثُ h الارتفاعُ بالأمتارِ، وَ θ قياسُ الزاويةِ التي دارَها الدولابُ. متى يكونُ ارتفاعُ الراكبِ عنِ الأرضِ 49 m؟

عندما يدور الدولاب بزاوية قياسها 151.64°، أو 208.36°

23 **حركةُ مقذوفاتٍ**: المسافةُ الأفقيةُ التي تقطعُها مقذوفةٌ في الهواءِ (منْ دونِ افتراضِ وجودٍ لمقاومةِ الهواءِ) تُعطى بالمعادلةِ: $d = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$، حيثُ: v_0 السرعةُ الابتدائيةُ، وَ θ الزاويةُ التي تُطلَقُ بها المقذوفةُ، وَ g تسارُعُ الجاذبيةِ الأرضيةِ ($9.8\ m/s^2$). إذا قُذِفَتْ كرةُ بيسبول بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها 40 m/s، فما الزاويةُ التي تُوجَّهُ بها الرميةُ لكيْ تقطعَ الكرةُ مسافةً أفقيةً مقدارُها 110 m قبلَ سقوطِها على الأرضِ؟ ما أبعدُ نقطةٍ يُمكِنُ أنْ تصلَها الكرةُ إذا قُذِفَتْ بهذهِ السرعةِ الابتدائيةِ؟ أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

24 **أكتشفُ الخطأَ**: حَلَّ كلٌّ منْ علياءَ وسميرٍ المعادلةَ: $2\sin x\cos x = \sin x$، حيثُ: $0° \le x < 360°$:

علياءُ

الحلولُ هيَ: 0°, 60°, 180°, 300° لأنَّ:

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$

$x = 0°, 180°$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = 60°, 300°$

سميرٌ

الحلّانِ هما: 60°, 300° لأنَّ:

$\frac{2\sin x\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x}$

$2\cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = 60°, 300°$

أنظر ملحق الإجابات.

أيُّهما إجابتُهُ صحيحةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

25 **تحدٍّ**: أَحُلُّ المعادلةَ: $2\sin x\cos x + \sin x + 2\cos x + 1 = 0$، علمًا بأنَّ $0° \le x \le 360°$. أنظر ملحق الإجابات.

26 **تحدٍّ**: أُحدِّدُ عددَ حلولِ المعادلةِ: $\cos x - \sin x - 1 = 0$، حيثُ: $0° \le x < 360°$. أنظر ملحق الإجابات.

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:

» أحل المعادلة: $\sin(2x) = 1$ بيانيًّا.

تعليمات المشروع:

- أُذكِّر الطلبة بأنَّ موعد عرض نتائج المشروع قريب، وأنَّه يتعيَّن عليهم وضع اللمسات النهائية الخاصة بالمشروع، والتأكُّد أنَّ جميع عناصر المشروع موجودة يوم العرض.

6 الختام

- في نهاية الدرس، أُوزِّع على كل طالب ورقتين لاصقتين مختلفتي اللون، ثم أطلب إلى كلٍّ منهم أنْ يكتب في إحدى الورقتين (الخضراء مثلًا) مسألة أعجبته في الدرس، وأتقن حلها، ثم يكتبوا في الورقة الأُخرى (الصفراء مثلًا) مسألة أُخرى تحتاج إلى مزيد من التدريب، ثم أجمع الأوراق قبل الخروج من غرفة الصف.

اختبار نهاية الوحدة

- أُراجِع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأسئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- أُعيِّن بعض الأسئلة ليحلها الطلبة واجبًا منزليًّا، ثم أُناقِشهم في إجاباتها في اللقاء التالي.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1) إذا كانَ $\cos\theta = -0.5$، فـإنَّ ضلعَ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ يقعُ في:

a) الربعِ الثاني.
b) الربعيْنِ: الثاني، والثالثِ.
c) الربعِ الرابعِ.
d) الربعيْنِ: الثاني، والرابعِ.

2) إذا قطعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ $P\left(-\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$، فإنَّ قيمةَ $\sin\theta$ هيَ:

a) $-\frac{40}{41}$
b) $\frac{9}{40}$
c) $-\frac{9}{41}$
d) $\frac{9}{41}$

3) قياسُ الزاويةِ المرجعيةِ للزاويةِ 230° هوَ:

a) 130°
b) 40°
c) 50°
d) 140°

4) إذا كانَــتْ $90^\circ < x < 180^\circ$، وكانَ $\sin x = \frac{8}{17}$، فإنَّ قيمةَ $\tan x$ هيَ:

a) $-\frac{8}{15}$
b) $\frac{8}{15}$
c) $\frac{15}{17}$
d) $-\frac{15}{8}$

5) حُلَّ المعادلةِ $x = \sin^{-1}(-1)$ هوَ:

a) 0°
b) 90°
c) 270°
d) 360°

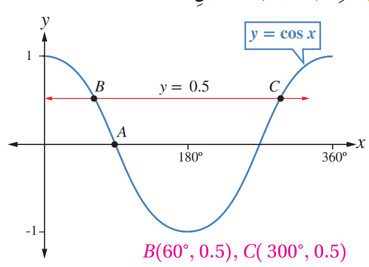
أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ x المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، التي يقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ عندَ كلٍّ منَ النقاطِ الآتيةِ: 6–11 أنظر ملحق الإجابات.

6) $(0.6, 0.8)$
7) $\left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right)$
8) $(-1, 0)$
9) $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$
10) $(0, 1)$
11) $(-0.96, 0.28)$

يُبيِّنُ الشكلُ التالي جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ المثلثيِّ $y = \cos x$ الذي يقطعُهُ المستقيمُ $y = 0.5$ في النقطتيْنِ B وَ C:

12) أَجِدُ إحداثياتِ النقطةِ A. $A(90^\circ, 0)$

13) أَجِدُ إحداثياتِ النقطتيْنِ: B، وَ C.



$B(60^\circ, 0.5)$, $C(300^\circ, 0.5)$

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ المُتبقِّيةَ في كلٍّ ممّا يأتي:

14) $\sin x = \frac{-1}{2}, 270^\circ \le x \le 360^\circ$

15) $\cos x = 0.4 , 0^\circ \le x \le 360^\circ$

16) $\tan x = 3 , 180^\circ \le x \le 360^\circ$

17) $\sin x = -\cos x , 0^\circ \le x \le 360^\circ$

14–17 أنظر ملحق الإجابات.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

18) $\sin 140^\circ$ ≈ 0.6428

19) $\cos 173^\circ$ ≈ -0.9925

20) $\tan 219^\circ$ ≈ 0.8098

21) $\sin 320^\circ$ ≈ -0.6428

22) $2\sin 150^\circ + \tan 135^\circ$ 0

23) $\sin^2 150^\circ + \cos^2 150^\circ$ 1

أَجِدُ حَلَّ المعادلاتِ الآتيةِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

24) $3\cos^2 x - 1 = 0$ 24–28 أنظر ملحق الإجابات.

25) $\sin x = -1.3212 \cos x$

26) $4 + 5\sin^2 x = 9\sin x$

27) $\tan x = 4\sin x$

28) $3\tan^2 x \cos x = 3\tan^2 x$

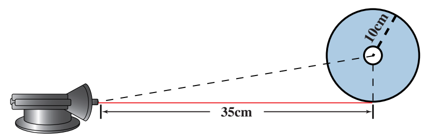
29) إذا كانَتْ x زاويةً في الربعِ الأولِ، وكانَ $\sin x + \sin(180^\circ - x) = 1.4444$ فأَجِدُ قياسَ الزاويةِ x. أنظر ملحق الإجابات.

30) **لعبةُ مِدفعٍ:** يُطلِقُ مِدفعُ قذائفَ بالوناتٍ مائيةً في مسابقةٍ للتسليةِ. إذا كانَ البُعْدُ الأفقيُّ لقذيفةٍ أُطلِقَتْ منَ المِدفعِ بزاويةٍ قياسُها x معَ المستوى الأفقيِّ، وبسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها 7 m/s، يُعطى بالأمتارِ حسبَ العلاقةِ: $d = 7 + 2\sin\left(\frac{3x}{5}\right)$، فما المسافةُ الأفقيةُ التي قطعَتْها قذيفةٌ أُطلِقَتْ بزاويةٍ مقدارُها 50°؟ 8 m

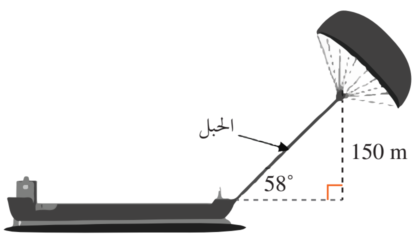
31) أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ $y = 4(\sin x)^2 - 3$، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$.
$x = 60^\circ, x = 120^\circ,$
$x = 240^\circ, x = 300^\circ$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

32) في تجربةِ علومٍ لاكتشافِ خصائصِ الضوءِ، وُضِعَ مصدرٌ ضوئيٌّ ليزريٌّ على بُعْدِ 35 cm منْ قرصٍ دائريٍّ مثقوبٍ منْ مركزِهِ، وكانَ طولُ نصفِ قُطْرِهِ 10 cm كما في الشكلِ الآتي. أَجِدُ زاويةَ الشعاعِ الذي يمرُّ خلالَ ثقبِ مركزِ هذا القرصِ. $\theta \approx 15.95^\circ$



33) لاستغلالِ طاقةِ الرياحِ وخفضِ استهلاكِ الوقودِ؛ رُبِطَ شراعٌ طائرٌ بسفينةٍ. ما الطولُ المناسبُ لحبلِ الشراعِ كيْ يسحبَ السفينةَ بزاويةِ 58°، ويكونَ الشراعُ على ارتفاعٍ رأسيٍّ مقدارُهُ 150 m كَما هوَ مُبيَّنٌ في الشكلِ الآتي:



a) 177 m

b) 283 m

c) 160 m

d) 244 m

تدريب على الاختبارات الدولية

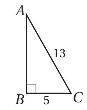
- أعرّف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبيّن لهم أهميتها، ثم أوجّههم إلى حل الأسئلة في بند)تدريب على الاختبارات الدولية(فرديًّا، ثم أناقشهم في إجاباتها على اللوح.
- أحفّز الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة ومثيلاتها، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدّية، وأحرص على تضمين اختباراتي المدرسية نماذج مماثلة لهذه الأسئلة.

كتاب التمارين

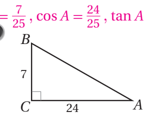
أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمثالِ المعطى.

النسبُ المثلثيةُ (الدرسُ 1)

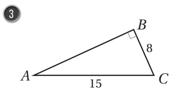
أجدُ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ A في كلٍّ ممّا يأتي، وأتركُ إجابتي في صورةِ كسرٍ:

1) 

$\sin A = \frac{5}{13}, \cos A = \frac{12}{13}, \tan A = \frac{5}{12}$

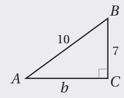
2) 

$\sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}, \tan A = \frac{7}{24}$

3) 

$\sin A = \frac{8}{15}, \cos A = \frac{\sqrt{161}}{15}, \tan A = \frac{8}{\sqrt{161}}$

مثالٌ: أجدُ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ A في المُثلَّثِ المُجاوِرِ.



الخطوةُ 1 أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لإيجادِ b.

نظريةُ فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
بتعويضِ $a = 7, c = 10$	$7^2 + b^2 = 10^2$
بالتبسيطِ	$49 + b^2 = 100$
بطرحِ 49 منْ طرفَي المعادلةِ	$b^2 = 51$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفَي المعادلةِ	$b = \pm\sqrt{51}$

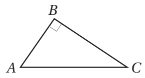
بما أنَّ الطولَ لا يُمكِنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ $b = \sqrt{51}$.

الخطوةُ 2 أجدُ النسبَ المُثلَّثيةَ الثلاثَ.

$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{7}{10}$ | $\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{51}}{10}$ | $\tan A = \frac{a}{b} = \frac{7}{\sqrt{51}}$

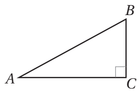
متطابقةُ فيثاغورس (الدرسُ 1)

4) في المُثلَّثِ المُجاوِرِ، إذا كانَ $\cos A = \frac{3}{5}$، فأجدُ $\sin A$.



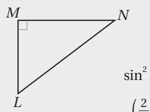
$\sin A = \frac{4}{5}$

5) في المُثلَّثِ المُجاوِرِ، إذا كانَ $\sin A = \frac{8}{17}$، فأجدُ $\cos A$.



$\cos A = \frac{15}{17}$

مثالٌ: في المُثلَّثِ المُجاوِرِ، إذا كانَ $\sin N = \frac{2}{3}$، فأجدُ $\cos N$.



مُتطابِقةُ فيثاغورس	$\sin^2 N + \cos^2 N = 1$
بتعويضِ $\sin N = \frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 N = 1$
بالتربيعِ	$\frac{4}{9} + \cos^2 N = 1$
بطرحِ $\frac{4}{9}$ منْ طرفَي المعادلةِ	$\cos^2 N = \frac{5}{9}$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَينِ	$\cos N = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

بما أنَّ جيبَ التمامِ للزاويةِ N في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ LMN هوَ ناتجُ قسمةِ طولِ الضلعِ المُجاوِرِ على الوترِ، وبما أنَّ الأطوالَ لا يُمكِنُ أنْ تكونَ سالبةً، فإنَّ $\cos N$ قيمةٌ موجبةٌ؛ أيْ إنَّ $\cos N = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

إيجادُ النسبِ المثلثيةِ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ (الدرسُ 2)

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، وأقرِّبُ إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

6) $\sin 43°$ 0.682	7) $\sin 67.2°$ 0.922	8) $\sin 90°$ 1
9) $\cos 80°$ 0.174	10) $\cos 22°$ 0.927	11) $\cos 90°$ 0
12) $\tan 20°$ 0.364	13) $\tan 45°$ 1	14) $\tan 30°$ 0.577

مثالٌ: أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، وأقرِّبُ إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

a) sin 54°

أضغطُ على مفتاحِ sin، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 54، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ =، فتظهرُ النتيجةُ:

sin 5 4 = 0.8090169944

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 0.809

إذنْ، $\sin 54° \approx 0.809$.

b) cos 80°

أضغطُ على مفتاحِ cos، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 80، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ =، فتظهرُ النتيجةُ:

cos 8 0 = 0.1736481777

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 0.174

إذنْ، $\cos 80° \approx 0.174$.

c) tan 25°

أضغطُ على مفتاحِ tan، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 25، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ =، فتظهرُ النتيجةُ:

tan 2 5 = 0.4663076582

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 0.466

إذنْ، $\tan 25° \approx 0.466$.

إيجادُ زاويةٍ حادةٍ في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ إذا عُلِمَتْ إحدى نسبِها باستعمالِ معكوسِ النسبةِ المثلثيةِ (الدرسُ 2)

أجدُ قياسَ $\angle A$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، وأقرِّبُ إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ:

15) $\sin A = \frac{4}{9}$ 26.4	16) $\cos A = 0.64$ 50.2	17) $\tan A = 0.707$ 35.2

أجدُ قياسَ $\angle B$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، وأقرِّبُ إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ:

18) $\sin B = 0.5$ 30	19) $\sin B = 0.999$ 87.4	20) $\sin B = 0.877$ 61.3

كتاب التمارين

مثالٌ: أجدُ قياسَ $\angle A$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، وأقرّبُ إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ:

a) $\sin A = \frac{3}{8}$

$\sin A = \frac{3}{8}$ النسبةُ المعطاةُ

$m\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$ معكوسُ الجيبِ

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$ كما يأتي:

SHIFT sin (3 ÷ 8) = 22.024312837

بالتقريبِ إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: $22°$

إذنْ، $m\angle A \approx 22°$.

b) $\cos A = \frac{10}{13}$

$\cos A = \frac{10}{13}$ النسبةُ المعطاةُ

$m\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{10}{13}\right)$ معكوسُ جيبِ التمامِ

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\cos^{-1}\left(\frac{10}{13}\right)$ كما يأتي:

SHIFT cos (10 ÷ 13) = 39.7151372318

بالتقريبِ إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: $39.7°$

إذنْ، $m\angle A \approx 39.7°$.

c) $\tan A = \frac{12}{5}$

$\tan A = \frac{12}{5}$ النسبةُ المعطاةُ

$m\angle A = \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$ معكوسُ الجيبِ

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$ كما يأتي:

SHIFT tan (12 ÷ 5) = 67.380135052

بالتقريبِ إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: $67.4°$

إذنْ، $m\angle A \approx 67.4°$.

تمثيلُ الاقتراناتِ بيانيًّا (الدرسُ 3)

أمثّلُ كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي في المستوى الإحداثيِّ: 21–26 أنظر ملحق الإجابات.

21) $y = 2x + 3$ 22) $y = 4 - 3x$ 23) $y + x = 10$

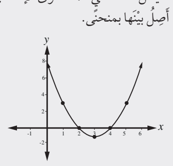
24) $y = x^2$ 25) $y = 3x - x^2$ 26) $y = x^2 - 2x - 3$

مثالٌ: أمثّلُ الاقترانَ الآتيَ: $y = x^2 - 6x + 8$ في المستوى الإحداثيِّ:

الخطوةُ 1 أنشئُ جدولَ قيمٍ كالآتي.

x	1	2	3	4	5
y	3	0	–1	0	3
(x, y)	(1, 3)	(2, 0)	(3, –1)	(4, 0)	(5, 3)

الخطوةُ 2 أعيّنُ النقاطَ في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أَصِلُ بينَها بمنحنًى.



حلُّ المعادلاتِ (الدرسُ 4)

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ:

27) $2x + 3 = 11$ $x = 4$

28) $5x - 4 = 10 - 2x$ $x = 2$

29) $2(3-2x) + 5 = x - 7$ $x = \frac{18}{5}$

30) $3x^2 - 12x = 0$ $x = 0, x = 4$

31) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ $x = 3, x = \frac{-1}{2}$

32) $x^2 - 9 = 0$ $x = 3, x = -3$

مثالٌ: أحلُّ المعادلةَ $9x^2 - 6x = 8$

$9x^2 - 6x - 8 = 0$ المعادلةُ الأصليّةُ

$(3x + 2)(3x - 4) = 0$ بالتحليلِ إلى العواملِ

$3x + 2 = 0, 3x - 4 = 0$ خاصيّةُ الضربِ الصفريِّ

$x = \frac{-2}{3}\ , x = 1\frac{1}{3}$ بإيجاد قيمةِ x

إذنْ، حلّا المعادلةِ هُما $1\frac{1}{3}$ و $\frac{-2}{3}$

الدرسُ 1
النسبُ المثلثيةُ
Trigonometric Ratios

أرسمُ الزوايا الآتيةَ في الوضعِ القياسيِّ: 1–4 أنظر ملحق الإجابات.

1) $170°$ 2) $240°$ 3) $315°$ 4) $85°$

أُحدِّدُ الربعَ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ كلِّ زاويةٍ ممّا يأتي إذا رُسِمَتْ في الوضعِ القياسيِّ:

5) $245°$ الربع الثالث 6) $275°$ الربع الرابع 7) $130°$ الربع الثاني 8) $26°$ الربع الأوّل

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ إذا قَطعَ ضلعُ انتهائِها في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ: 9–12 أنظر ملحق الإجابات.

9) $P(0, -1)$ 10) $P(1, 0)$ 11) $P\left(\frac{8}{17}, -\frac{15}{17}\right)$ 12) $P\left(\frac{-60}{61}, \frac{-11}{61}\right)$

أُحدِّدُ الربعَ (أوِ الأرباعَ) الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ إذا كانَ:

13) $\sin\theta < 0$ الربع الثالث، أو الربع الرابع

14) $\cos\theta < 0$ الربع الثاني، أو الربع الثالث

15) $\cos\theta < 0\ , \tan\theta > 0$ الربع الثالث

16) $\tan\theta < 0\ , \cos\theta < 0$ الربع الثاني

أَجِدُ النسبتيْنِ المثلثيّتيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ: 17–20 أنظر ملحق الإجابات.

17) $\cos\theta = -\frac{1}{12}\ , 90° < \theta < 180°$

18) $\tan\theta = -2\ , -1 < \sin\theta < 0$

19) $\sin\theta = 0.6\ , \tan\theta < 0$

20) $\cos\theta = 0.45\ , 270° < \theta < 360°$

جلسَ زيدٌ في لعبةِ الدولابِ على المقعدِ الذي تُمثِّلُهُ النقطةُ $(0, 1)$ على دائرةِ الوحدةِ. إذا كانَ الدولابُ يدورُ عكسَ حركةِ عقاربِ الساعةِ، ويُكمِلُ دورةً واحدةً في دقيقتيْنِ: 21–22 أنظر ملحق الإجابات.

21) فما إحداثيا النقطةِ على دائرةِ الوحدةِ التي تُمثِّلُ مقعدَ زيدٍ بعدَ 60 ثانيةً؟

22) فما إحداثيا النقطةِ على دائرةِ الوحدةِ التي تُمثِّلُ مقعدَ زيدٍ بعدَ 90 ثانيةً؟

كتاب التمارين

الدرسُ 2

النسبُ المثلثيةُ للزوايا ضمنَ الدورةِ الواحدةِ
Trigonometric Ratios for Angles between 0° and 360°

أَجِدُ الزاويةَ المرجعيةَ لكلٍّ منَ الزوايا الآتيةِ:

1 117° 63°
2 250° 70°
3 215° 35°
4 300° 60°

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، وأقرّبُ إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

5 $\sin 170^\circ$ ≈ 0.1736
6 $\tan 230^\circ$ ≈ 1.1918
7 $\cos 250^\circ$ ≈ -0.3420
8 $\tan 310^\circ$ ≈ -1.1918

أَجِدُ القيمةَ الدقيقةَ لكلٍّ ممّا يأتي (منْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ):

9 $\cos 135^\circ$ $\frac{-1}{\sqrt{2}}$
10 $\sin 240^\circ$ $\frac{-\sqrt{3}}{2}$
11 $\tan 315^\circ$ -1
12 $\sin 210^\circ$ $\frac{-1}{2}$

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

13 $\sin 40^\circ + \sin 130^\circ + \sin 220^\circ + \sin 310^\circ$ 0

14 $\sin 60^\circ - \sin 120^\circ + \sin 180^\circ - \sin 240^\circ + \sin 300^\circ - \sin 360^\circ$ 0

أَجِدُ في كلٍّ ممّا يأتي زاويةً أُخرى بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ الجيبِ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

15 80° 100°
16 146° 34°
17 215° 325°
18 306° 234°

أَجِدُ في كلٍّ ممّا يأتي زاويةً أُخرى بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ جيب التمام نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

19 10° 350°
20 125° 235°
21 208° 152°
22 311° 49°

أَجِدُ في كلٍّ ممّا يأتي قيمةَ (أوْ قيمَ) θ، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$: 23–30 أنظر ملحق الإجابات.

23 $\sin\theta = 0.75$
24 $\cos\theta = 0.65$
25 $\tan\theta = -1$
26 $\sin\theta = -0.87$
27 $\sin\theta = 0.812$
28 $\tan\theta = -\frac{2}{3}$
29 $\cos\theta = -0.25$
30 $\tan\theta = 5$

31 **ألعابٌ:** في دولابِ مدينةِ الألعابِ يُعطى ارتفاعُ الراكبِ عنِ الأرضِ بعدَ x دقيقةٍ منْ بدءِ الدورانِ بالعلاقةِ: $h = 14.5 - 12.5\cos(36x)$، حيثُ h الارتفاعُ عنْ سطحِ الأرضِ بالأمتارِ. أَجِدُ ارتفاعَ الراكبِ بعدَ 7.5 دقائقَ منْ بدءِ الدورانِ. أنظر ملحق الإجابات.

32 **حسابٌ فَلَكيٌّ:** يُقدَّرُ في إحدى المدنِ عددُ ساعاتِ النهارِ y في كلِّ يومٍ منْ أيامِ السنةِ حسبَ رقمِ اليومِ d منَ السنةِ بالعلاقةِ: $y = 3\sin(d - 81) + 12$. ما عددُ ساعاتِ النهارِ في هذهِ المدينةِ يومَ الأولِ منْ شهرِ آبَ (اليومُ رقمُ 213)؟ أنظر ملحق الإجابات.

الدرسُ 3

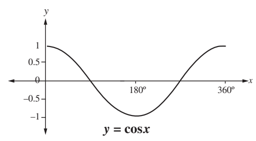
تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ
Graphing Trigonometric Functions

أرسمُ منحنى كلٍّ ممّا يأتي في الفترةِ المعطاةِ، مُحدِّدًا الفترةَ التي يكونُ فيها الاقترانُ موجبًا، والفترةَ التي يكونُ فيها سالبًا: 1–3 أنظر ملحق الإجابات.

1 $y = \sin x,\ 90^\circ \leq x \leq 180^\circ$
2 $y = \cos x,\ 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$
3 $y = \tan x,\ 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

4 أرسمُ الاقترانيْنِ $y = \sin x$، وَ $y = \cos x$ في الفترةِ $[0^\circ, 360^\circ]$ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ. ماذا أُلاحِظُ على المنحنييْنِ؟ أنظر ملحق الإجابات.

5 أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ الآتيَ لأَجِدَ قيمَ: a، وَ b، وَ c، وَ d: أنظر ملحق الإجابات.

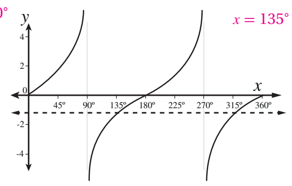


$\cos 0^\circ = \cos a^\circ$
$\cos 30^\circ = \cos b^\circ$
$\cos 45^\circ = \cos c^\circ$
$\cos 90^\circ = \cos d^\circ$

يظهرُ في الشكلِ الآتي التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ $y = \tan x$ في الفترةِ $[0^\circ, 360^\circ]$. أستعملُ الشكلَ لأَجِدَ:

6 قيمتيْنِ للمُتغيِّرِ x يكونُ عندَهُما $\tan x = -1$. $x = 135^\circ,\ x = 315^\circ$

7 قيمَ المُتغيِّرِ x التي يكونُ عندَها $\tan x = 0$. $x = 0^\circ,\ x = 180^\circ,\ x = 360^\circ$



الدرسُ 4

حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ
Solving Trigonometric Equations

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ المثلثيةِ الآتيةِ في الفترةِ $[0^\circ, 360^\circ]$: 1–24 أنظر ملحق الإجابات.

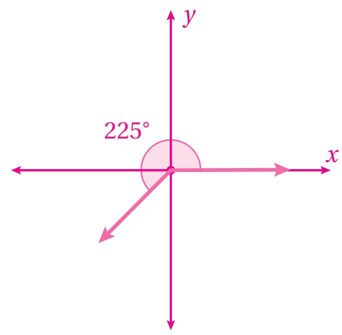
1 $\sin x = \frac{1}{3}$
2 $\tan x = \sqrt{3}$
3 $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
4 $\cos x = -\frac{1}{2}$
5 $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
6 $2\sin x + 3 = 1$
7 $\sqrt{2}\cos x + 1 = 2$
8 $\sqrt{3}\tan x + 4 = 1$
9 $3\tan x + 2 = 7 - 2\tan x$
10 $5 - 3\sin x = \sin x + 1$
11 $2(3\sin x + 1) + 2 = 4\sin x + 5$
12 $3(2 - \cos x) + 4 = 5\cos x + 2$
13 $3 + 2\cos(3x) = 1,\ 0^\circ < x < 120^\circ$
14 $5 + 2\tan(4x) = 7,\ 0^\circ < x < 90^\circ$
15 $4\sin x\cos x + 3\sin x = 0$
16 $2\cos x\sin x = \cos x$
17 $4\sin^2 x = 1$
18 $\tan^2 x - 9 = 0$
19 $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$
20 $3\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$
21 $2\tan^2\theta - 5\tan\theta - 3 = 0$
22 $6\sin^2 x + 7\sin x - 3 = 0$
23 $9\cos^2 x - 9\cos x + 2 = 0$
24 $\tan^2\theta + 4\tan\theta - 12 = 0$

25 **قياساتٌ:** يرتكزُ سُلَّمٌ طولُهُ 5 m على أرضٍ أفقيةٍ وحائطٍ رأسيٍّ. إذا كانَ أسفلُ السُّلَّمِ يبعدُ 1.5 m عنِ الحائطِ، فما ارتفاعُ رأسِ السُّلَّمِ عنِ الأرضِ؟ ما قياسُ الزاويةِ التي يصنعُها السُّلَّمُ معَ الأرضِ؟ أنظر ملحق الإجابات.

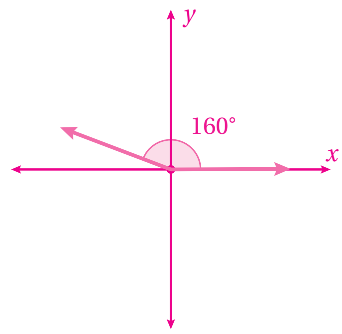
26 **ساريةٌ:** رصدَ سامرٌ قمَّةَ ساريةِ علمٍ ارتفاعُها عنِ الأرضِ 12 m منْ نقطةٍ على الأرضِ تبعدُ 30 m عنْ قاعدةِ الساريةِ. إذا كانَ طولُ سامرٍ 1.75 m، فما قياسُ الزاويةِ التي ينظرُ فيها سامرٌ إلى قمَّةِ الساريةِ؟ أنظر ملحق الإجابات.

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 1:

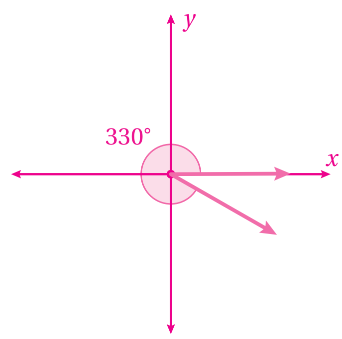
1)



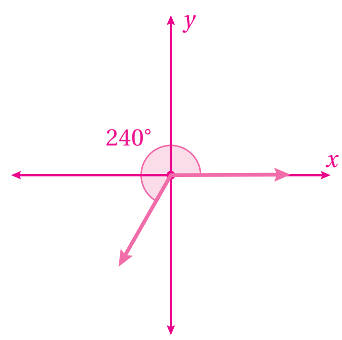
2)



3)



4)



21) $\cos\theta = 0, \sin\theta = -1 , \tan\theta \ u.d$

22) $\cos\theta = 0.5, \sin\theta = 0.5\sqrt{3} , \tan\theta = \sqrt{3}$

23) $\cos\theta = \frac{-8}{17} , \sin\theta = \frac{15}{17} , \tan\theta = \frac{-15}{8}$

24) $\cos\theta = \frac{20}{29} , \sin\theta = \frac{-21}{29} , \tan\theta = \frac{-21}{20}$

25) $(\frac{3}{4})^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

$\frac{9}{16} + (\cos\theta)^2 = 1$

$(\cos\theta)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4} , 90° < \theta < 180°$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

26) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0.78 \Rightarrow \sin\theta = 0.78\cos\theta$

$(0.78\cos\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

$1.6084\,(\cos\theta)^2 = 1 \Rightarrow \cos\theta \approx \pm 0.789$

$\sin\theta < 0, \tan\theta > 0 \Rightarrow \cos\theta \approx -0.789$

$\sin\theta = 0.78 \times (-0.789) \approx -0.615$

27) $(\sin\theta)^2 + (-0.75)^2 = 1$

$(\sin\theta)^2 + 0.5625 = 1$

$(\sin\theta)^2 = 1 - 0.5625 = 0.4375$

$\sin\theta \approx \pm 0.66$

$\cos\theta < 0, \tan\theta < 0 \Rightarrow \sin\theta > 0$

$\Rightarrow \sin\theta \approx 0.66$

$\tan\theta = -\frac{0.66}{0.75} = -0.88$

28) $(-0.87)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

$(\cos\theta)^2 = 1 - 0.7569 = 0.2431$

$\cos\theta \approx \pm 0.49 , 270° < \theta < 360°$

$\Rightarrow \cos\theta = 0.49$

$\tan\theta = -\frac{0.87}{0.49} \approx -1.78$

29) أكبر قيمة لجيب الزاوية هي 1، عندئذٍ يكون قياس الزاوية هو $90°$، وأصغر قيمة هي -1، عندئذٍ يكون قياس الزاوية هو $270°$؛ لأنَّ ضلع انتهاء الزاوية $90°$ يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $(0,1)$، وضلع انتهاء الزاوية $270°$ يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $(0,-1)$.

30) إجابة زينة هي الصحيحة، $\sin\theta + \cos\theta = -1.4$؛ لأن $\tan\theta > 0$، وهذا يعني أنَّ الزاوية تقع في الربع الثالث، حيث تكون قيمة كل من جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية سالبة $\sin x = -0.6, \cos x = -0.8$

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 2:

20)
$$\sin 210° = -\frac{1}{2}$$
$$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

21)
$$\cos\theta + \sin\theta < 0$$
$$\sin\theta < -\cos\theta$$
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} > \frac{-\cos\theta}{\cos\theta}$$
(عُكِست إشارة المتباينة عند القسمة على $\cos\theta$ لأنَّه سالب في الربع الثاني)
$$\tan\theta > -1$$

ولكن $\tan 135° = -1$، وأعلم أنَّ: $\tan 120° = -\sqrt{3} < -1$، وأنَّ:
$$\tan 150° = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.577 > -1$$
أيْ إنَّ: $\tan\theta > -1$ عندما $135° < \theta < 180°$

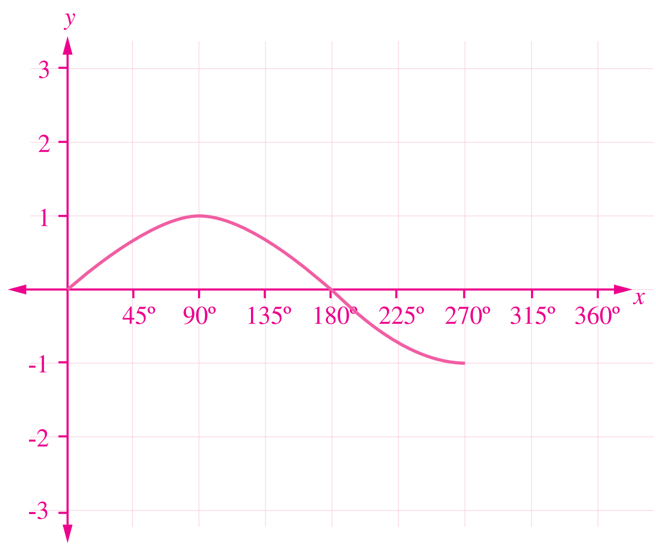
إذن، مجموعة حل المتباينة: $\cos\theta + \sin\theta < 0$ هي: $135° < \theta < 180°$

22) إجابة سندس غير صحيحة؛ لأنَّه لا يمكن أنْ تكون قيمة الجيب لأيِّ زاوية أكبر من 1

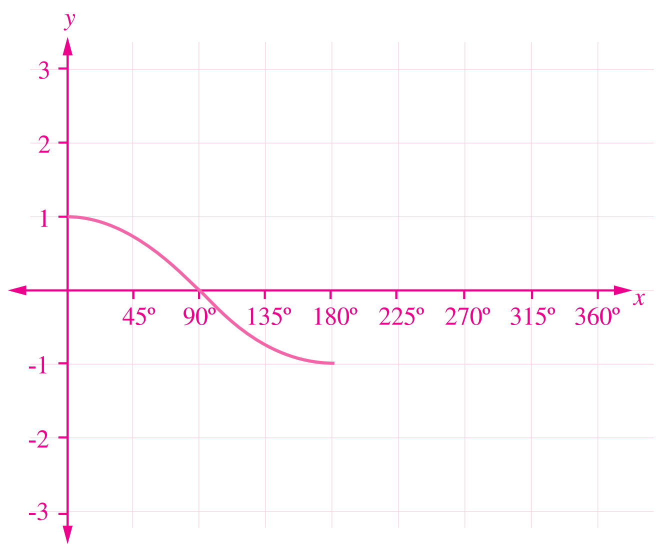
23) 0؛ لأنَّه يقابل القِيَم الموجبة لجيوب تمام الزوايا في الربعين: الأوَّل والرابع قيمة سالبة لجيوب تمام الزوايا المنعكسة في الربعين: الثالث والثاني على الترتيب.

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 3:

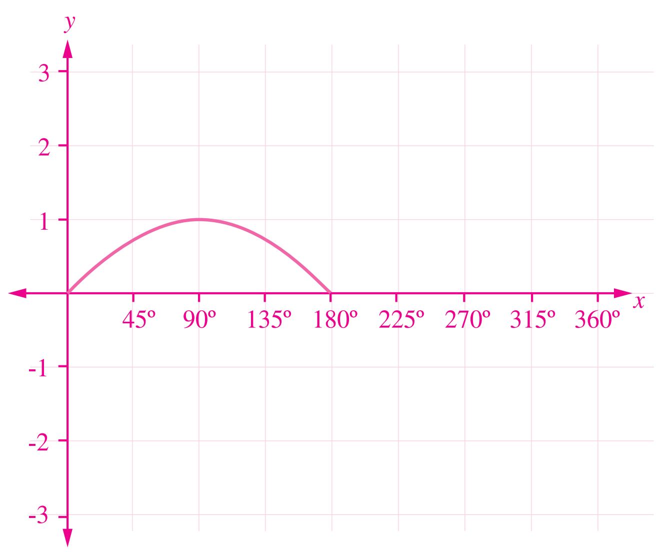
1)



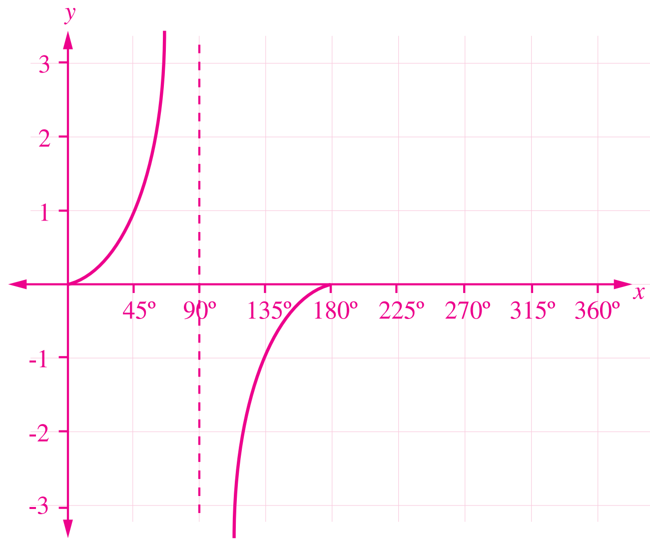
2)



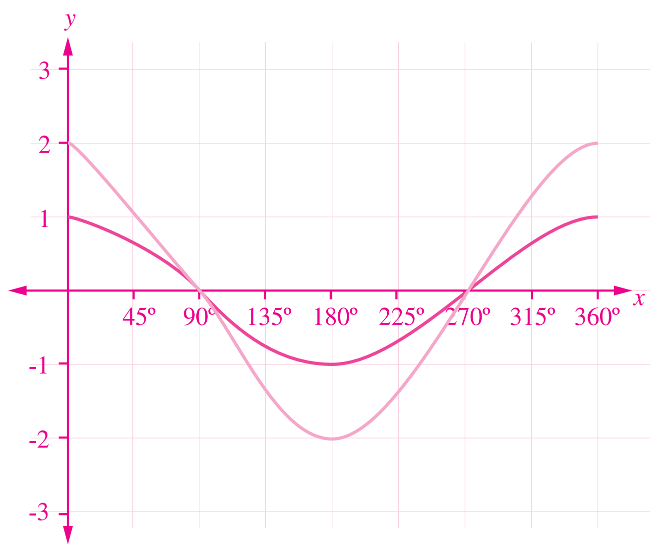
3)



4)



14)



الفـــرق بينهما في أكبر قيمـــة، وأصغر قيمة. إنَّ الإحداثـــي y لكل نقطة على منحنى $2\cos x$ يساوي مثلي الإحداثي y للنقطة المقابلة على منحنى $\cos x$.

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 4:

7) $5-2\cos(4x) = 4,\ 0° \le x \le 90°$

$-2\cos(4x) = -1$

$\cos(4x) = \dfrac{1}{2}$

$\cos\theta = \dfrac{1}{2},\ 0° \le \theta \le 360°$

$\Rightarrow \theta = 60°,\ \theta = 300°$

$\Rightarrow x = 15°,\ x = 75°$

14) $(\tan x - 4)(\tan x - 5) = 0$

$\tan x = 4 \Rightarrow x \approx 75.96°,\ x \approx 255.96°$

$\tan x = 5 \Rightarrow x \approx 78.69°,\ x \approx 258.69°$

15) $\cos x\,(2\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = 90°,\ x = 270°$

$\cos x = 0.5 \Rightarrow x = 60°,\ x = 300°$

16) $(\sin x - 1)(4\sin x + 1) = 0$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = 90°$

$\sin x = -0.25 \Rightarrow x \approx 194.48°,\ x \approx 345.52°$

17) $x = 45°,\ x = 135°$

$x = 225°,\ x = 315°$

20) $118 = -16\cos(30x) + 110$

$\Rightarrow -16\cos(30x) = 8$

$\Rightarrow \cos(\theta) = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \theta = 120° \text{ or } 240°$

$\Rightarrow x = 4,\ x = 8$

إذن، يبعد رأس عقرب الســاعات 118 ســنتيمتر عن الســقف عند الساعة الرابعة وعند الساعة الثامنة.

21) $d = 90\cos\theta\ ,\ d = 60\cos(90° - \theta)$

$\Rightarrow 90\cos\theta = 60\cos(90° - \theta)$

$\Rightarrow 90\cos\theta = 60\sin\theta \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \theta \approx 56.31°$

$d = 90\cos 56.31° \approx 50\text{ m}$

23) $110 = \dfrac{(40)^2\sin(2\theta)}{9.8}$

$\Rightarrow \sin(2\theta) \approx 0.674$

$\Rightarrow \sin(x) \approx 0.674$

$\Rightarrow x \approx 42.38° \text{ or } x \approx 137.62°$

$\Rightarrow \theta \approx 21.19° \text{ or } \theta \approx 68.81°$

يصل المقذوف أبعد نقطة عندما $\theta = 45°$، عندئذٍ:

$$d = \frac{(40)^2\sin(90°)}{9.8} = \frac{1600 \times 1}{9.8} \approx 163.27\text{ m}$$

24) أخطأ سمير عندما اختصر $\sin x$ من طرفي المعادلة الأصلية، أمّا علياء فإجابتها صحيحة.

25) $2\sin x\cos x + \sin x + 2\cos x + 1 = 0$

$\sin x\,(2\cos x + 1) + 2\cos x + 1 = 0$

$(2\cos x + 1)\,(\sin x + 1) = 0$

$\cos x = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow x = 120° \quad , \quad x = 240°$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = 270°$

26) $\cos x - \sin x = 1$

$\cos x = 1 \quad , \quad \sin x = 0$

$\Rightarrow x = 0°$

$\cos x = 0 \quad , \quad \sin x = -1$

$\Rightarrow x = 270°$

إذن، يوجد حلّان لهذه المعادلة في الفترة $[0, 360)$.

إجابات أسئلة اختبار نهاية الوحدة:

6) $\sin x = 0.8 , \cos x = 0.6 , \tan x = \dfrac{4}{3}$

7) $\sin x = \dfrac{-12}{13} , \cos x = \dfrac{5}{13} , \tan x = \dfrac{-12}{5}$

8) $\sin x = 0 , \cos x = -1 , \tan x = 0$

9) $\sin x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} , \cos x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} , \tan x = 1$

10) $\sin x = 1 , \cos x = 0 , \tan x$ *u.d.* غير مُعرَّف

11) $\sin x = 0.28 , \cos x = -0.96 , \tan x \approx -0.29$

14) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} , \tan x = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$

15) $\sin x = \pm\sqrt{0.84} , \tan x = \pm\dfrac{\sqrt{0.84}}{0.4}$

16) $\cos x = \dfrac{-1}{\sqrt{10}} , \sin x = \dfrac{-3}{\sqrt{10}}$

17) $\sin x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} , \cos x = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}} , \tan x = -1$

24) $x \approx 54.74° , x \approx 305.26°, 234.74° , 125.26°$

25) $x \approx 127.12° , x \approx 307.12°$

26) $(\sin x - 1)(5\sin x - 4) = 0$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = 90°$

$\sin x = 0.8 \Rightarrow x \approx 53.13° \quad , \quad x \approx 126.87°$

27) $\dfrac{\sin x}{\cos x} = 4\sin x \Rightarrow \sin x = 4\sin x\cos x$

$\Rightarrow \sin x - 4\sin x\cos x = 0 \Rightarrow \sin x\,(1 - 4\cos x) = 0$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0° \quad , \quad x = 180°$

$\cos x = 0.25 \Rightarrow x \approx 75.52° \quad , \quad x \approx 284.48°$

28) $3\tan^2 x\cos x - 3\tan^2 x = 0 \Rightarrow 3\tan^2 x\,(\cos x - 1) = 0$

$\tan^2 x = 0 \Rightarrow x = 0° \ , \ x = 180°$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0° \ , \ x = 360°$

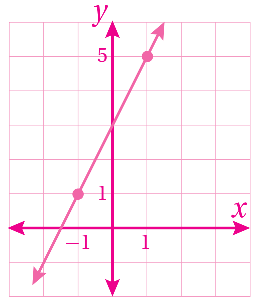
29) $2\sin x = 1.4444 \Rightarrow \sin x = 0.7222$

$\Rightarrow x \approx 46.24°$

إجابات كتاب التمارين – استعد لدراسة الوحدة:

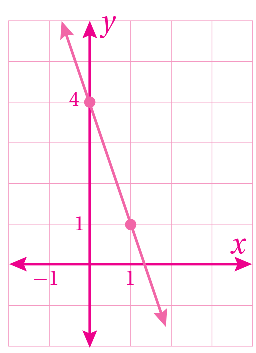
3)

x	-1	1
$y = 2x + 3$	1	5
(x, y)	$(-1, 1)$	$(1, 2)$



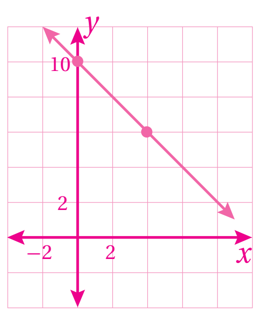
4)

x	0	1
$y = 4 - 3x$	4	1
(x, y)	$(0, 4)$	$(1, 1)$

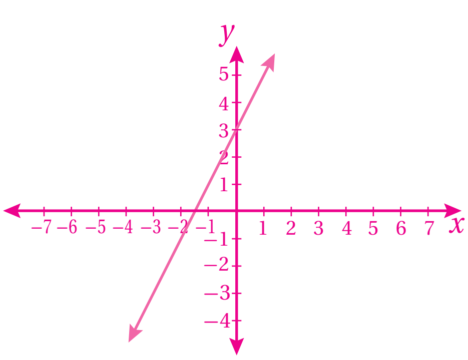


5)

x	0	4
$y = 10 - x$	10	6
(x, y)	$(0, 10)$	$(4, 6)$



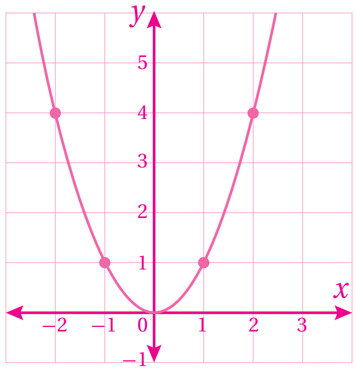
21)



6) الإحداثي x لرأس منحنى الاقتران $y = ax^2 + bx + c$ (القطع المكافئ) هو $x = \frac{-b}{2a}$

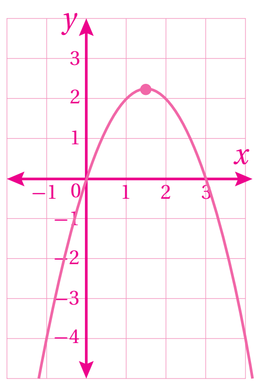
الإحداثي x لرأس منحنى الاقتران $y = x^2$ هو $x = \frac{0}{2} = 0$

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
(x, y)	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$



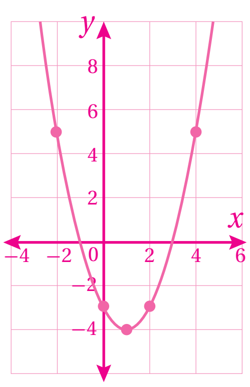
7) الإحداثي x لرأس منحنى الاقتران $y = 3x - x^2$ هو $x = \frac{-3}{-2} = 1.5$

x	-1	0	1.5	3	4
$y = 3x - x^2$	-4	0	2.25	0	-4
(x, y)	$(-1, -4)$	$(0, 0)$	$(1, 2)$	$(3, 0)$	$(4, -4)$

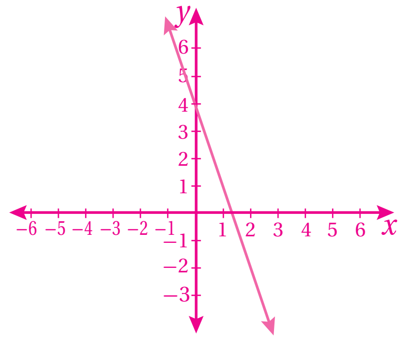


8) الإحداثي x لرأس منحنى الاقتران $y = x^2 - 2x - 3$ هو $x = \frac{2}{2} = 1$

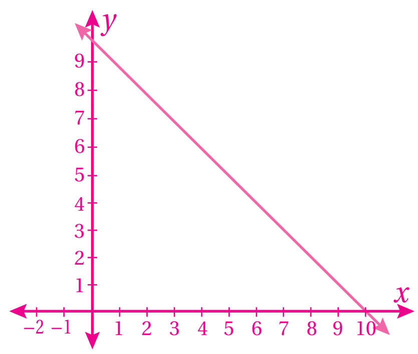
x	-2	0	1	2	4
$y = x^2 - 2x - 3$	5	-3	-4	-3	5
(x, y)	$(-2, 5)$	$(0, -3)$	$(1, -4)$	$(2, -3)$	$(4, 5)$



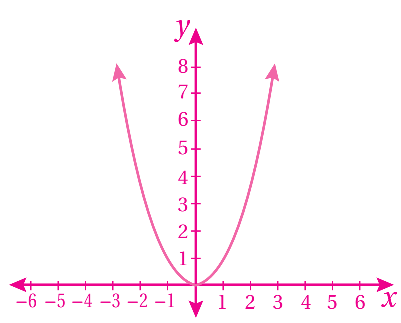
22)



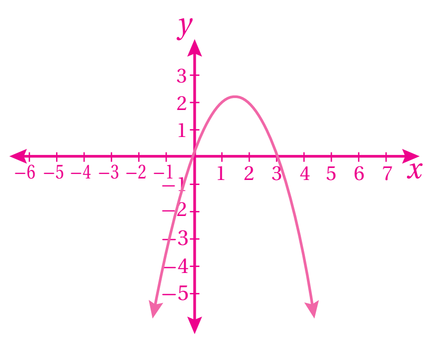
23)



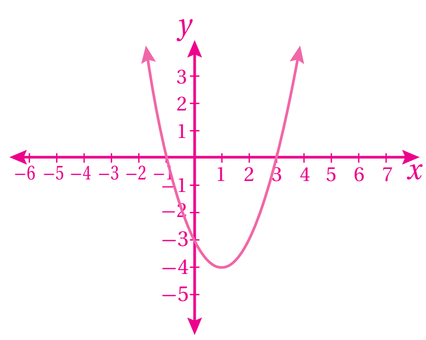
24)



25)

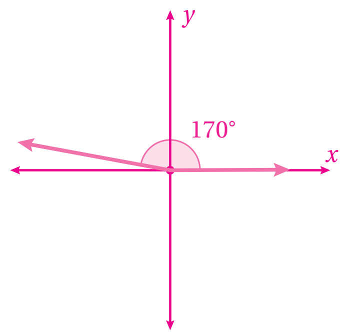


26)

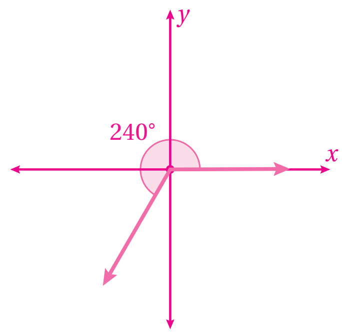


إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 1:

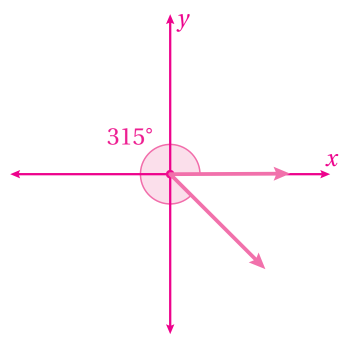
1)



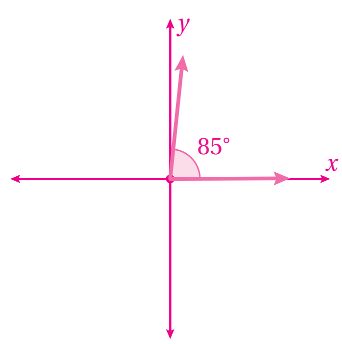
2)



3)



4)



9) $\sin x = -1, \cos x = 0$, $\tan x$ *u.d*

10) $\sin x = 0, \cos x = 1$, $\tan x = 0$

11) $\sin x = \frac{-15}{17}$, $\cos x = \frac{8}{17}$, $\tan x = \frac{-15}{8}$

12) $\sin x = \frac{-11}{61}$, $\cos x = \frac{-60}{61}$, $\tan x = \frac{11}{60}$

17) $\sin\theta = \frac{\sqrt{143}}{12}$, $\tan\theta = -\sqrt{143}$

18) $\sin\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

19) $\cos\theta = -0.8$, $\tan\theta = -0.75$

20) $\sin\theta \approx -0.89$, $\tan\theta \approx -1.98$

21) بعد نصف دورة يصل إلى النقطة $(0, -1)$

22) بعد ثلاثة أرباع الدورة يصل إلى النقطة $(1, 0)$

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 2:

23) $\theta \approx 48.59°$, $\theta \approx 131.41°$

24) $\theta \approx 49.46°$, $\theta \approx 310.54°$

25) $\theta = 135°$, $\theta = 315°$

26) $\theta \approx 240.46°$, $\theta \approx 299.54°$

27) $\theta \approx 54.29°$, $\theta \approx 125.71°$

28) $\theta \approx 146.31°$, $\theta \approx 326.31°$

29) $\theta \approx 104.48°$, $\theta \approx 255.52°$

30) $\theta \approx 78.69°$, $\theta \approx 258.69°$

31) $h = 14.5 - 12.5\cos(36(7.5))$

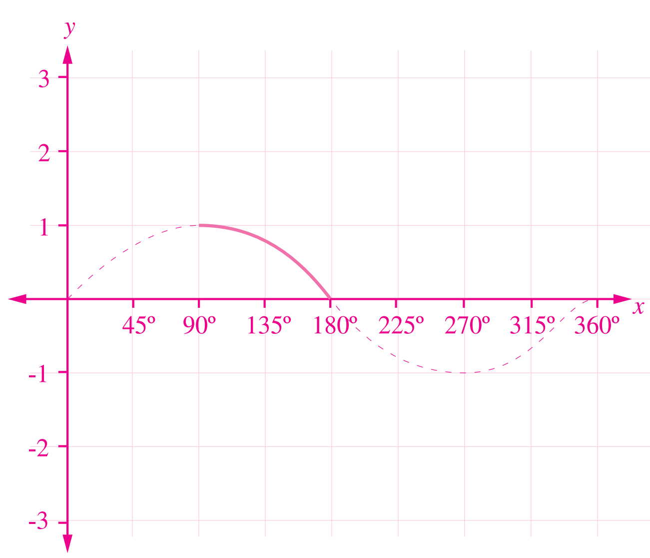
$= 14.5 - 12.5\cos 270 = 14.5$ m

32) $y = 3\sin(213 - 81) + 12$

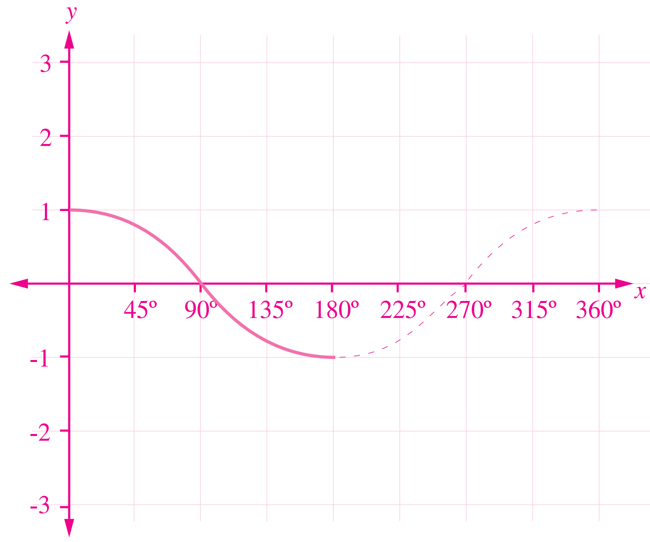
$= 3\sin 132 + 12 = 14.23$ *hr*

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 3:

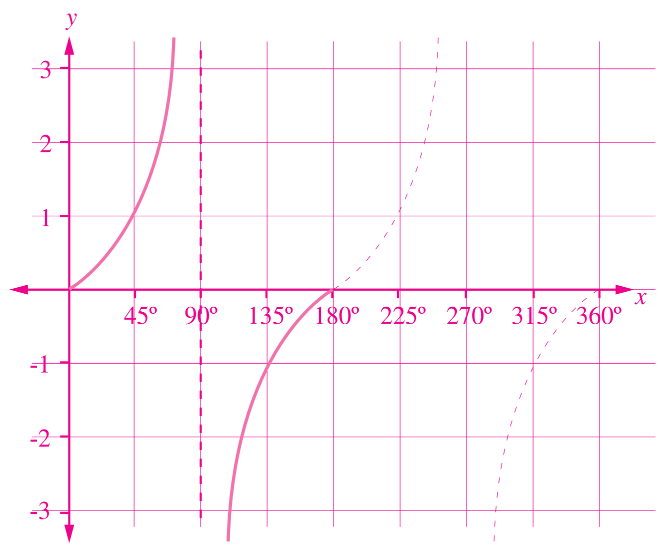
1)



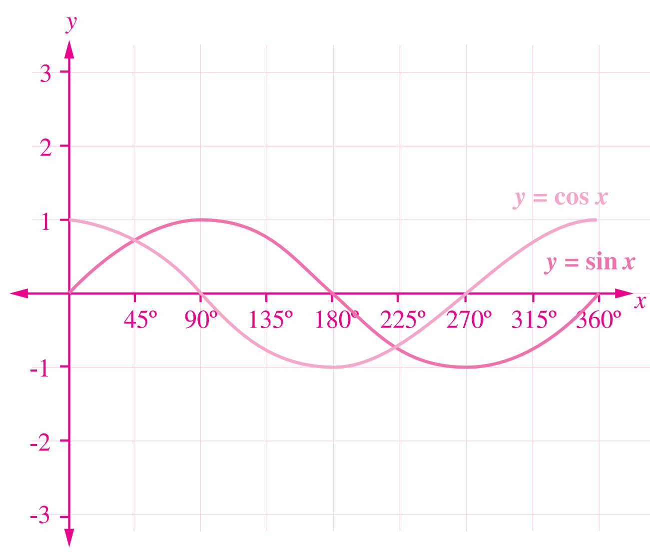
2)



3)



4)



- يبدأ منحنى $\sin x$ من $(0, 0)$، في حين يبدأ $\cos x$ من $(0,1)$.
- منحنى $\sin x$ يقطع المحور x عند: 0°، و180°، و360°
- منحنى $\cos x$ يقطع المحور x عند: 90°، و270°
- أكبر قيمة لكليهما: 1، وأصغر قيمة لكليهما: 1−

5) $a = 360°$
$b = 330°$
$c = 315°$
$d = 270°$

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 4:

1) $x \approx 19.47°, x \approx 160.53°$

2) $x = 60°, x = 240°$

3) $x \approx 125.26°, x \approx 234.74°$

4) $x = 120°, x = 240°$

5) $x = 150°, x = 330°$

6) $x = 270°$

7) $x = 45°, x = 315°$

8) $x = 120°, x = 300°$

9) $x = 45°, x = 225°$

10) $x = 90°$

11) $x = 30°, x = 150°$

12) $x = 0°, x = 360°$

13) $x = 60°$

14) $x = 11.25°, x = 56.25°$

15) $x = 0°, x = 180°\ , x \approx 138.59°\ , x \approx 221.41°$

16) $x = 90°, x = 270°\ , x = 30°\ , x = 150°$

17) $x = 30°, x = 150°\ , x = 210°\ , x = 330°$

18) $x \approx 71.57°, x \approx 251.57°\ , x \approx 108.43°\ , x \approx 288.43°$

19) $x = 0°, x = 360°\ , x = 60°\ , x = 300°$

20) $x = 270°, x \approx 221.81°\ , x \approx 318.19°$

21) $\theta \approx 71.57°, \theta \approx 251.57°\ , \theta \approx 153.43°\ , \theta \approx 333.43°$

22) $x \approx 19.47°, x \approx 160.53°$

23) $x \approx 70.53°, x \approx 289.47°\ , x \approx 48.19°\ , x \approx 311.81°$

24) $\theta \approx 63.43°, \theta \approx 243.43°\ , \theta \approx 99.46°\ , \theta \approx 279.46°$

25) $y^2 = 5^2 - 1.5^2 = 22.75 \Rightarrow y \approx 4.77 \text{ m}$

$$\sin\theta = \frac{4.77}{5} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{4.77}{5}\right) \Rightarrow \theta \approx 72.55°$$

26) $$\tan\theta = \frac{12-1.75}{30} = \frac{10.25}{30}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{10.25}{30} \Rightarrow \theta \approx 18.86°$$

الوحدة

4

تطبيقات المثلثات

Triangle Applications

www.nccd.gov.jo

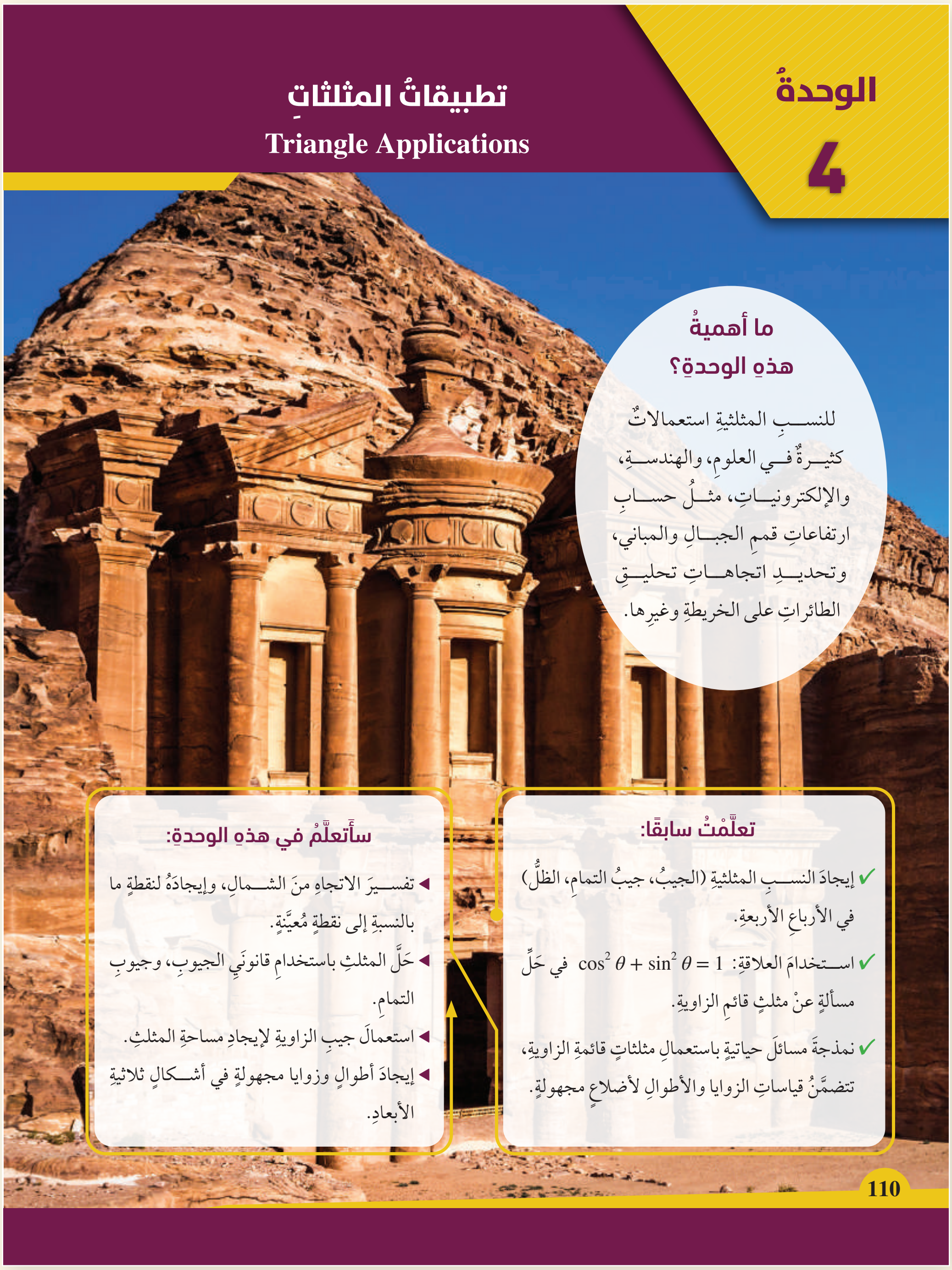
مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
الدرس 1: الاتجاه من الشمال.	• استعمال الاتجاه من الشمال لتحديد الاتجاه. • إيجاد اتجاه نقطة من نقطة مُعيَّنة. • إيجاد الاتجاه المعاكس. • حل مسائل عن الاتجاه من الشمال.	الاتجاه من الشمال.	• المسطرة. • المنقلة. • جهاز الحاسوب. • ورقة المصادر 3 • ورقة المصادر 4 • جهاز عرض البيانات.	2
الدرس 2: قانون الجيوب.	• استنتاج قانون الجيوب. • حل المثلث إذا عُلِم منه طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما. • حل المثلث إذا عُلِم منه طول ضلع وقياس زاويتين. • حل مسائل حياتية باستعمال قانون الجيوب.	قانون الجيوب. حل المثلث.	• جهاز الحاسوب. • الآلة الحاسبة. • أوراق، أو ألواح صغيرة. • جهاز عرض البيانات.	3
الدرس 3: قانون جيوب التمام.	• استنتاج قانون جيوب التمام. • حل المثلث إذا عُلِم منه طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما. • حل مثلث عُلِمت أطوال جميع أضلاعه. • حل مسائل حياتية باستعمال قانوني الجيوب وجيوب التمام.	قانون جيوب التمام.	• جهاز الحاسوب. • الآلة الحاسبة. • صندوق يحوي مجموعة بطاقات رُسِم عليها مثلثات مختلفة. • جهاز عرض البيانات.	3
الدرس 4: استعمال جيب الزاوية لإيجاد مساحة المثلث.	إيجاد مساحة مثلث عُلِم منه: • طولا ضلعين، وقياس زاوية محصورة بينهما. • أطوال أضلاعه الثلاثة. • طول ضلع، وزاويتان. • طولا ضلعين، وزاوية تقابل أحدهما.		• جهاز الحاسوب. • جهاز عرض البيانات. • الآلة الحاسبة. • لوحة رُسِم عليها المثلثات المبينة في بند (التهيئة).	3
الدرس 5: حل مسائل ثلاثية الأبعاد.	• استعمال النسب المثلثية ونظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال مجهولة في مسائل ثلاثية الأبعاد. • حساب الزاوية بين مستقيم ومستوى. • حل مسائل حياتية ثلاثية الأبعاد.		• جهاز الحاسوب. • نماذج مجسمات متنوعة. • الآلة الحاسبة. • جهاز عرض البيانات.	3
عرض نتائج مشروع الوحدة.				2
اختبار نهاية الوحدة.				2
مجموع الحصص:				18 حصة

الوحدة 4

نظرة عامة على الوحدة:

درس الطلبة سابقًا النسب المثلثية، والدوال المثلثية، وحل المثلث قائم الزاوية، واستعملوها لحل مسائل حياتية ثنائية الأبعاد، وسـوف يبنون على ذلك في هـذه الوحدة لتعلُّم حـل المثلث غير قائم الزاوية باسـتعمال قانوني الجيوب وجيوب التمام، وحل مسـائل حياتية ثنائية الأبعاد وثلاثية الأبعاد، وإيجاد مساحة المثلث الذي عُلِم فيه طولا ضلعين وقياس الزاويـة المحصورة بينهما، وتفسـير الاتجاه من الشمال، وإيجاده.



الوحدةُ 4

تطبيقاتُ المثلثاتِ

Triangle Applications

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

للنسـبِ المثلثيةِ استعمالاتٌ كثيـرةٌ فـي العلومِ، والهندسـةِ، والإلكترونيـاتِ، مثـلُ حسـابِ ارتفاعاتِ قممِ الجبـالِ والمباني، وتحديـدِ اتجاهـاتِ تحليـقِ الطائراتِ على الخريطةِ وغيرِها.

تعلَّمْتُ سابقًا:

✓ إيجادَ النسـبِ المثلثيةِ (الجيبُ، جيبُ التمامِ، الظلُّ) في الأرباعِ الأربعةِ.

✓ اسـتخدامَ العلاقةِ: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ في حَلِّ مسألةٍ عنْ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ.

✓ نمذجةَ مسائلَ حياتيةٍ باستعمالِ مثلثاتٍ قائمةِ الزاويةِ، تتضمَّنُ قياساتِ الزوايا والأطوالِ لأضلاعٍ مجهولةٍ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

◀ تفسـيرَ الاتجاهِ منَ الشـمالِ، وإيجادَهُ لنقطةٍ ما بالنسبةِ إلى نقطةٍ مُعيَّنةٍ.

◀ حَلَّ المثلثِ باستخدامِ قانونَي الجيوبِ، وجيوبِ التمامِ.

◀ استعمالَ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ.

◀ إيجادَ أطوالٍ وزوايا مجهولةٍ في أشـكالٍ ثلاثيةِ الأبعادِ.

110

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف التاسع

- إيجـاد النسـب المثلثية الأساسـية للزوايا الحادة.
- إيجاد قيـاس زاوية في مثلـث قائم الزاوية إذا عُلِمت إحدى النسـب الأساسية للزاوية وضلع من أضلاع المثلث.
- توظيف النسـب المثلثية الأساسية في حل مثلـث قائم الزاوية ضمـن مواقف رياضية وحياتية متنوعة.
- اسـتنتاج المتطابقـة المثلثيـة الأساسـية: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$، واستعمالها لإيجاد النسب المثلثية الأساسية.

الصف العاشر

- تفسير الاتجاه من الشمال.
- إيجاد اتجاه نقطة ما بالنسبة إلى نقطة مُعيَّنة.
- تعرُّف قانوني الجيوب، وجيوب التمام.
- حـل مسـائل رياضيـة وحياتيـة باسـتعمال قانوني الجيـوب، وجيـوب التمـام.
- حل المثلث باسـتعمال قانونـي الجيوب، وجيوب التمام.
- استعمال جيب الزاوية لإيجاد مساحة المثلث.
- إيجـاد أطـوال وزوايـا مجهولـة فـي أشـكال ثلاثية الأبعاد.

الصف الحادي عشر (العلمي)

- نمذجة مواقف حياتية على:
  - قياسي الزاوية: الدائري، والستيني.
  - الاقترانـات: القاطـع، وقاطـع التمـام، وظـل التمـام.
  - تمثيل الاقترانات (القاطع، وقاطع التمام، وظل التمام) في المستوى الإحداثي.
- توظيـف الاقترانـات المثلثيـة فـي نمذجـة ظواهـر تحـدث دوريًّـا بسـعة وتـردُّد مُحدَّديـن.

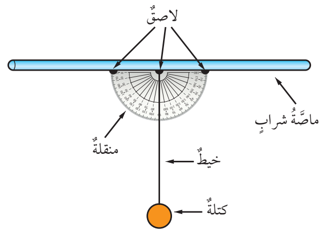
مشروعُ الوحدةِ

صنعُ كلينومترٍ واستعمالُهُ

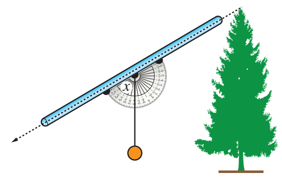
فكرةُ المشروعِ صنعُ جهازٍ بسيطٍ لإيجادِ قياساتِ زوايا الارتفاعِ والانخفاضِ، ثمَّ استعمالُهُ.

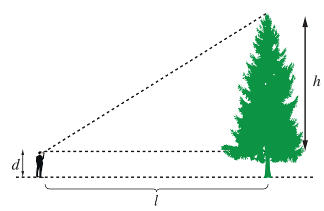
الموادُّ والأدواتُ ماصَّةُ شرابٍ، منقلةٌ، خيطٌ، كتلةٌ (مفتاحٌ، أوْ ممحاةٌ)، لاصقٌ شفّافٌ، شريطُ قياسٍ.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:



1 **صنعُ الكلينومترِ:** أُثبِّتُ ماصَّةَ الشرابِ على الحافةِ المستقيمةِ للمنقلةِ باستعمالِ لاصقٍ شفّافٍ، ثمَّ أُثبِّتُ طرفَ الخيطِ في مركزِ المنقلةِ، وأربطُ بطرفِهِ الآخرِ كتلةً صغيرةً، مثلَ: المفتاحِ، أوِ المشابكِ المعدنيةِ؛ على أنْ تتدلّى رأسيًّا إلى أسفلَ مثلِ خطِّ الشاقولِ.





2 **استعمالُ الكلينومترِ:** أستعملُ أنا وأفرادُ مجموعتي الكلينومترَ لإيجادِ ارتفاعِ بنايةٍ أوْ شجرةٍ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

- أختارُ شيئًا لأقيسَ ارتفاعَهُ، وليكنْ شجرةً.
- أقفُ على مسافةٍ منْ قاعدةِ الشجرةِ، مُمسِكًا بماصَّةِ الشرابِ.
- أنظرُ منْ فتحةِ ماصَّةِ الشرابِ إلى قمَّةِ الشجرةِ، ثمَّ أطلبُ إلى زميلي/ زميلتي أنْ يقرأَ الزاويةَ x التي يشيرُ إليْها الخيطُ، مُلاحِظًا أنَّ هذهِ الزاويةَ تقعُ بينَ خطِّ النظرِ والخطِّ الرأسيِّ. وبذلكَ، تكونُ زاويةُ ارتفاعِ قمَّةِ الشجرةِ: $(90^\circ - x)$.
- أقيسُ المسافةَ بينَ المكانِ الذي أقفُ عندَهُ وقاعدةِ الشجرةِ.
- أستعملُ القياساتِ التي دوَّنْتُها لإيجادِ ارتفاعِ الشجرةِ فوقَ مستوى عيني، باستعمالِ العلاقةِ الآتيةِ:

$$\tan (90^\circ - x) = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l \tan (90^\circ - x)$$

- أُضيفُ المسافةَ بينَ الأرضِ ومستوى عيني إلى القيمةِ التي توصَّلْتُ إليْها لإيجادِ ارتفاعِ الشجرةِ فوقَ سطحِ الأرضِ.

عرضُ النتائجِ:

أكتبُ معَ أفرادِ مجموعتي تقريرًا يتضمَّنُ ما يأتي:

- صورةٌ لجهازِ الكلينومترِ المصنوعِ.
- صورٌ لجميعِ الأشياءِ التي قيسَتْ ارتفاعاتُها، وتدوينُ الحساباتِ التي تمَّتْ في أثناءِ القياسِ بجانبِ كلٍّ منْها.

111

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	إعداد أداة القياس بصورة صحيحة.			
2	استعمال قياسات وحسابات صحيحة.			
3	التحقُّق من صحة النموذج والصور والرسوم التوضيحية، ودقة الحسابات الخاصة بها واكتمالها.			
4	مشاركة أفراد المجموعة جميعًا بفاعلية في المشروع.			
5	اتصاف التقرير المكتوب بأنّه كامل ومُنظَّم.			
6	اتصاف الشرح الشفوي لأفراد المجموعة بالوضوح والفهم والإقناع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: صنع كلينومتر واستعماله.

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى نمذجة مواقف حياتية على المثلثات، والتوسُّع في معرفة الطلبة لاستعمالات النسب المثلثية، وتوظيفها في إيجاد قياسات زوايا الارتفاع والانخفاض باستعمال أدوات بسيطة من بيئتهم.

خطوات تنفيذ المشروع

- أُعرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلُّم موضوعات الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أطلب إليهم أنْ يُوزِّعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لكل مجموعة.
- أطلب إلى أفراد كل مجموعة إعداد مشروع المجموعة، وكتابة تقرير مفصل عن عملهم، وكيف استعمل كل فرد في المجموعة الأداة التي صنعوها لقياس ارتفاع جسم ما، وبيان الحسابات الوافية.
- أُوجِّه أفراد المجموعات إلى قياس أشياء عِدَّة، مثل: ارتفاع شجرة، وارتفاع مئذنة، وارتفاع منزل، وارتفاع سارية العلم في ساحة المدرسة.
- أُبيِّن لأفراد المجموعات معايير تقييم المشروع، وأعرض عليهم أداة التقييم، مُنوِّهًا بأنَّه يمكنهم طرح أيِّ استفسارات عن المشروع في أثناء دراستهم هذه الوحدة.
- أُذكِّر أفراد المجموعات بأهمية إنجاز المشروع مع نهاية دراسة هذه الوحدة.

عرض النتائج

- ألفت انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، وإعداد عرض تقديمي، يحوي صورًا لمراحل التنفيذ.
- أطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- أُوضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلُّب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- أطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، وأُنبِّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم المجاورة.
- أطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

الدرس 1

نتاجات الدرس

- تعرُّف الاتجاه من الشمال.
- استعمال الاتجاه من الشمال لتحديد الاتجاه.
- إيجاد اتجاه نقطة من نقطة مُعيَّنة.
- إيجاد الاتجاه المعاكس.
- حل مسائل عن الاتجاه من الشمال.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- استعمال المنقلة لقياس الزوايا ورسمها.
- توظيف العلاقات بين الزوايا الناتجة من تقاطع مستقيم مع مستقيمين متوازيين في إيجاد قياسات زوايا مجهولة.
- توظيف مجموع قياسات الزوايا حول نقطة في إيجاد قياسات مجهولة.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أُذكِّر الطلبة بكيفية رسم الزوايا، وإيجاد قياساتها، ثم أطلب إليهم رسم الزاويتين: $120°$، و$255°$، ثم إيجاد قياس الزاوية الثانية التي تكمل الدورة في الحالتين.
$240°$، و $105°$
- أرسم مستقيمين متوازيين وقاطعًا لهما، ثم أطلب إلى الطلبة تسمية أزواج الزوايا الخاصة الناتجة والعلاقات بين قياساتها. بعد ذلك أكتب قياس إحدى الزوايا، ثم أطلب إلى الطلبة إيجاد قياسات الزوايا الباقية كلها. أزواج الزوايا الخاصة الناتجة: المتناظرة، والمتبادلة، والمتحالفة.

الدرس 1

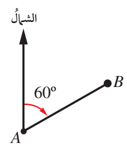
الاتجاهُ منَ الشمالِ
Bearing

فكرةُ الدرسِ تفسيرُ الاتجاهِ منَ الشمالِ، وإيجادُهُ لنقطةٍ ما بالنسبةِ إلى نقطةٍ أُخرى بالرسمِ، والقياسِ، والحسابِ باستعمالِ العلاقاتِ بينَ الزوايا.

المصطلحاتُ الاتجاهُ منَ الشمالِ.

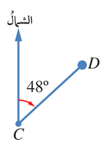
مسألةُ اليومِ حلَّقَتْ طائرةٌ منْ عمّانَ إلى العقبةِ، وقدْ صنعَ مسارُها المستقيمُ زاويةً قياسُها $200°$ معَ خطِّ الشمالِ الجغرافيِّ. ما قياسُ الزاويةِ بينَ مسارِ عودةِ الطائرةِ إلى عمّانَ وخطِّ الشمالِ الجغرافيِّ؟

الاتجاهُ منَ الشمالِ (bearing) للنقطةِ B منَ النقطةِ A هوُ قياسُ الزاويةِ التي ضلعُ ابتدائِها خطُّ الشمالِ الجغرافيِّ المرسومِ منَ النقطةِ A، وضلعُ انتهائِها المستقيمُ AB، وذلكَ عندَ قياسِ الزاويةِ في اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ. يُكتَبُ الاتجاهُ منَ الشمالِ باستعمالِ عددٍ منْ ثلاثةِ أرقامٍ (منازلُ) بينَ $000°$ وَ $360°$.

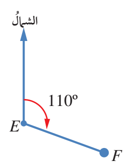


يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ أنَّ الاتجاهَ منَ الشمالِ للنقطةِ B منَ النقطةِ A هوَ $060°$.

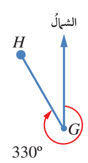
يُستخدَمُ الاتجاهُ منَ الشمالِ كثيرًا في تحديدِ خطوطِ الملاحةِ البحريةِ والجويةِ.



الاتجاهُ منَ الشمالِ للنقطةِ D منَ النقطةِ C هوَ $048°$.



الاتجاهُ منَ الشمالِ للنقطةِ F منَ النقطةِ E هوَ $110°$.



الاتجاهُ منَ الشمالِ للنقطةِ H منَ النقطةِ G هوَ $330°$.

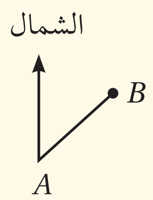
2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » أين تقع مدينة العقبة بالنسبة إلى العاصمة عمّان؟ غرب الجنوب من عمّان.
  - » كيف يمكن إيجاد الزاوية بين اتجاه الجنوب واتجاه العقبة؟ بطرح $180°$ من $200°$
  - » ما قياس الزاوية بين خط الشمال المار بمدينة العقبة والخط الواصل من العقبة إلى عمّان؟ $20°$
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

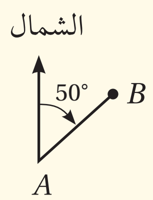
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أنْ أقول لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل أقول له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمَنْ يستطيع إعطاء إجابة أُخرى؟)، أو أقول له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

3 التدريس

1



2



- أرسم على اللوح الشكل 1 (القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ تصنع زاوية قياسها $50°$ مع خط الشمال)، ثم أُخبِر الطلبة أنَّ النقطتين A وB تُمثِّلان مدينتين على خريطة، وأنَّ المطلوب معرفة اتجاه B من A، وأنَّ أفضل طريقة لذلك تمثيل الاتجاه بصورة زاوية تُسمّى الاتجاه من الشمال، وإيجاد قياسها مع حركة عقارب الساعة من خط الشمال، والإشارة إلى الشمال اختصارًا بالحرف N، مُبيِّنًا أنَّه يمكن التعبير عن الاتجاه بعدد من 3 أرقام؛ فإذا كان للزاوية رقمان كُتِب 0 على يسارها ليصبح لها 3 أرقام، مثل: $060°$، و$123°$، و $075°$
- أطلب إلى أحد الطلبة قياس هذه الزاوية، ثم كتابة القياس كما في الشكل 2، مُبيِّنًا أنَّ اتجاه B من A هو $050°$
- أُوجِّه الطلبة إلى دراسة الأشكال في الصفحة 112 من كتاب الطالب، وملاحظة وجود أوضاع مختلفة للاتجاه من الشمال.
- أُوضِّح للطلبة الاتجاهات الثمانية الأساسية، ثم أرسم خطوطًا أخرى من مركز البوصلة، وأطلب إلى بعض الطلبة تقدير الاتجاهات التي رسمتها.
- أرسم على اللوح أيَّ نقطتين (C, D مثلًا)، ثم أسأل الطلبة:
  - » كيف يمكن إيجاد اتجاه النقطة D من النقطة C؟
- أختار طالبًا لإجابة السؤال على اللوح، ثم أسأل الطلبة:
  - » مَنْ يُؤيِّد هذه الإجابة؟
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أُعطي كل مجموعة نسخة من **ورقة المصادر 3: الاتجاه من الشمال**.
- أتجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.

مثال 1

- أناقِش الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن كيف يُكتَب الاتجاه من شكل عُلِمت قياسات بعض زواياه.

أخطاء مفاهيمية:

- قـد يعتقد بعض الطلبة أنَّ اتجــاه المدينة C من المدينــة A هــو $115°$؛ لذا أُذكِّرهــم أنَّ الاتجاه يقاس بدءًا من خط الشـــمال مــع حركة عقارب الســاعة، ثم أرسم قوسًــا يدل على الزاوية التي يجب إيجاد قياسها.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

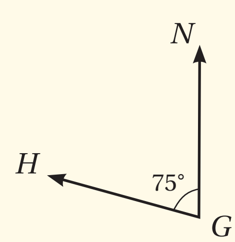
التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حــل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشــتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

مثال إضافي:

- أكتب اتجاه النقطة H من النقطة G في الشــكل الآتي.

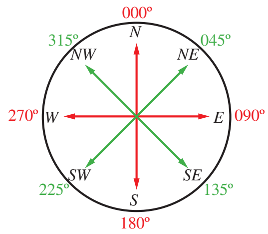
$285°$



اعتمـدَ الإنسـانُ قديمًا على الشمسِ والقمرِ والنجومِ في معرفةِ الاتجاهـاتِ، ثمَّ أخذَ يعتمـدُ اليومَ علـى البوصلةِ التـي تُحدِّدُ اتجاهَ الشـمالِ، ومنْهُ تُحدَّدُ بقيةُ الاتجاهاتِ.

توجدُ أربعةُ اتجاهاتٍ رئيسةٍ يجبُ تذكُّرُها دائمًا، هيَ:

1. الشمالُ (N)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($000°$).
2. الشرقُ (E)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($090°$).
3. الجنوبُ (S)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($180°$).
4. الغربُ (W)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($270°$).

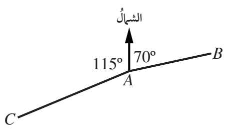


توجدُ أربعةُ اتجاهاتٍ أُخرى مشهورةٍ تقعُ بينَ الاتجاهاتِ الأربعةِ الرئيسةِ يجبُ تذكُّرُها دائمًا، هيَ:

1. الشمالُ الشرقيُّ (NE)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($045°$).
2. الجنوبُ الشرقيُّ (SE)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($135°$).
3. الجنوبُ الغربيُّ (SW)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($225°$).
4. الشمالُ الغربيُّ (NW)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($315°$).

مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ موقعَ ثلاثِ مدنٍ، هيَ: A، وَ B، وَ C. أَكتبُ اتجاهَ المدينةِ B منَ المدينةِ A، واتجاهَ المدينةِ C منَ المدينةِ A.



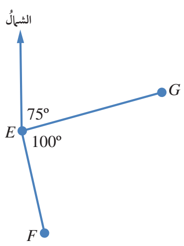
اتجاهُ المدينةِ B منَ المدينةِ A هوَ $070°$، واتجاهُ المدينةِ C منَ المدينةِ A هوَ $245° = 360° - 115°$

أَتعلَّمُ

سنستعملُ في بقيةِ الدرسِ كلمةَ (اتجاهٌ) وحدَها للدلالةِ على الاتجاهِ منَ الشمالِ.

أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ موقعَ ثلاثِ سفنٍ، هيَ: E، وَ F، وَ G. أَكتبُ اتجاهَ السفينةِ G منَ السفينةِ E، واتجاهَ السفينةِ F منَ السفينةِ E. أنظر الهامش.



إجابة سؤال (أتحقَّق من فهمي 1):

اتجاه G من E هو $075°$، واتجاه F من E هو $175°$

مثال 2

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد الاتجـاه المعاكس، مُوضِّحًا لهم أنَّـه توجد طريقتان لذلك، هما: استعمال الرسم، واستعمال الجبر.

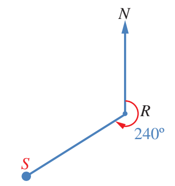
مثال إضافي:

- إذا كان اتجاه المدينـة A من المدينة B هو $150°$، فما اتجاه المدينة B من المدينة A؟ $330°$

إذا عُلِمَ اتجاهُ النقطةِ S منَ النقطةِ R، فيُمكِنُ حسابُ اتجاهِ النقطةِ R منَ النقطةِ S .

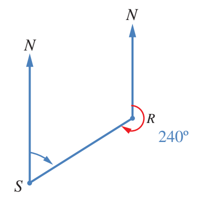
مثال 2

أَجِدُ اتجاهَ النقطةِ R منَ النقطةِ S في الشكلِ المجاورِ.



الطريقةُ الأولى: استعمالُ الرسمِ.

أرسمُ خطًّا رأسيًّا يُبيِّنُ اتجاهَ الشمالِ الجغرافيِّ عندَ النقطةِ S، ثمَّ أستعملُ منقلةً لأقيسَ الزاويةَ التي رأسُها S، وضلعاها خطُّ الشمالِ (SN) والمستقيمُ SR.



سأجدُ أنَّ قياسَ هذهِ الزاويةِ هوُ $60°$، إذنْ، اتجاهُ النقطةِ R منَ النقطةِ S هوَ $060°$.

الطريقةُ الثانيةُ: استعمالُ الجبرِ.

يُمكِنُ إيجادُ اتجاهِ النقطةِ R منَ النقطةِ S باستعمالِ العلاقاتِ بينَ الزوايا.

$$m\angle NRS = 360° - 240° = 120°$$

مجموعُ قياسِ الزوايا حولَ نقطةٍ هوَ $360°$

$$m\angle NSR = 180° - 120° = 60°$$

خطّا الشمالِ متوازيانِ؛ لذا، فالزاويتانِ الداخليتانِ NRS، وَ NSR متكاملتانِ

أتحقق من فهمي

إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ X منَ النقطةِ Z هوَ $295°$، فما اتجاهُ النقطةِ Z منَ النقطةِ X؟ $115°$

مريمُ الجيليُّ هيَ عالِمةُ رياضياتٍ وفَلَكٍ مُسْلِمةٌ عاشتْ في حلبَ زمنَ الدولةِ العباسيةِ، واخترعَتِ الأسطرلابَ المُعقَّدَ؛ وهوَ آلةٌ فلكيةٌ مُهِمَّةٌ بُنِيَتْ عليْها آليةُ عملِ أنظمةِ الملاحةِ الحديثةِ (GPS).

أتذكَّرُ

الزاويتانِ المتكاملتانِ هُما زاويتانِ مجموعُ قياسَيْهِما $180°$

المفاهيم العابرة للمواد:

بعد الانتهاء من حل المثال 2، أُعزِّز لدى الطلبة الوعي بالقضايا الإنسانية (النوع الاجتماعي)، ودور المرأة في تطور العلم، ثم أطلب إليهم البحث في مصادر المعرفة المتوافرة عن عالِمات أسهمن في تطور العلوم، ثم كتابة تقرير عن ذلك، ثم قراءته في الإذاعة المدرسية، مُذكِّرًا إيّاهم بضرورة توثيق مصدر معلوماتهم.

مثال 3

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد الاتجاه في موقف حياتي.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أُعطي كل مجموعة نسخة من ورقة المصادر **4: الاتجاه من الشمال والخريطة.**
- أتجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أُحدِّد وقتًا لإنجاز المهام، مُنبِّهًا أفراد المجموعات إلى انتهاء الوقت، ثم أطلب إلى كل مجموعة عرض إجابتها أمام المجموعات الأخرى.

أخطاء مفاهيمية:

- قد لا يُميِّز بعض الطلبة النقطة الأساسية التي يُحدَّد منها اتجاه النقطة الأخرى؛ لذا أُذكِّرهم بما يأتي:
  - تحديد الاتجاه بدءًا من النقطة التي تتبع كلمة (من) في السؤال، وبدء عملية القياس دائمًا من الشمال.
  - البدء أوَّلًا بإضافة خط الشمال المار بالنقطة التي يُحدَّد منها الاتجاه.
  - تحفيز الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط على وضع دائرة في السؤال حول النقطة التي يُحدَّد منها الاتجاه.

إرشاد:

عندما يُحدِّد الطلبة النقطة التي يقاس منها الاتجاه، ويرسمون خط الشمال المار بها، أُنبِّههم إلى ضرورة وضع مركز المنقلة على هذه النقطة، ووضع التدريج 0 على خط الشمال الذي هو ضلع ابتداء الزاوية، ثم اعتماد اتجاه حركة عقارب الساعة لقراءة قياس الزاوية التي يشير إليها الخط المار بالنقطة الأساسية والنقطة التي نريد تحديد اتجاهها.

مثال 3: من الحياة

أستعملُ الخريطةَ المجاورةَ لتحديدِ اتجاهِ العاصمةِ عمّانَ منْ مدينةِ القدسِ الشريفِ.

تُعَدُّ مدينةُ القدسِ واحدةً منْ أقدمِ مدنِ العالَمِ؛ فتاريخُها يرجِعُ إلى أكثرَ منْ خمسةِ آلافِ سنةٍ. وللقدسِ أسماءٌ عديدةٌ، منها: بيتُ المقدسِ، وأُولى القِبلتيْنِ، والقدسُ الشريفُ.

الخطوةُ 1: أرسمُ قطعةً مستقيمةً بينَ مدينتَيِ القدسِ الشريفِ وعمّانَ.

الخطوةُ 2: أرسمُ خطًّا رأسيًّا يُبيِّنُ اتجاهَ الشمالِ الجغرافيَّ عندَ مدينةِ القدسِ الشريفِ.

الخطوةُ 3: أستعملُ المنقلةَ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ بينَ خطِّ الشمالِ الجغرافيِّ والقطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ المدينتيْنِ باتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ. سأجِدُ أنَّ قياسَ هذهِ الزاويةِ هوَ °78

إذنْ، اتجاهُ العاصمةِ عمّانَ منْ مدينةِ القدسِ الشريفِ هوَ °078.

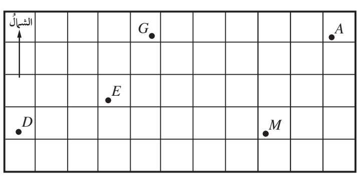
أتحقق من فهمي

أستعملُ الخريطةَ في المثالِ السابقِ لتحديدِ اتجاهِ مدينةِ حيفا منْ مدينةِ القدسِ الشريفِ. °350

أتدرب وأحل المسائل

أجِدُ كلًّا منَ الاتجاهاتِ الآتيةِ باستعمالِ المنقلةِ:

1. اتجاهُ النقطةِ D منَ النقطةِ E. °250
2. اتجاهُ النقطةِ G منَ النقطةِ A. °270
3. اتجاهُ النقطةِ M منَ النقطةِ D. °091



المفاهيم العابرة للمواد:

بعد الانتهاء من حل المثال 3، أُعزِّز لدى الطلبة الوعي بالقضايا السياسية والوطنية (هوية القدس)، ودور المملكة الأردنية الهاشمية في الإشراف على المقدسات الإسلامية والمحافظة عليها، ثم أطلب إليهم كتابة فقرة من 60 كلمة تُبيِّن هذا الدور، ثم عرضها على مُعلِّم/ مُعلِّمة اللغة العربية.

أرسمُ شكلًا يُوضِّحُ كلَّ موقفٍ ممّا يأتي: 8–4 أنظر ملحق الإجابات.

4 اتجاهُ النقطةِ C منَ النقطةِ H هوَ 170°.

5 اتجاهُ النقطةِ B منَ النقطةِ W هوَ 310°.

أرسمُ شكلًا لحَلِّ المسائلِ الآتيةِ:

6 اتجاهُ A منْ B هوَ 070°. أَجِدُ اتجاهَ B منْ A.

7 اتجاهُ X منْ Y هوَ 324°. أَجِدُ اتجاهَ Y منْ X.

8 تقعُ النقطةُ A شماليَّ النقطةِ C، وتقعُ النقطةُ B شرقيَّ النقطةِ A، واتجاهُ النقطةِ B منَ النقطةِ C هوَ 045°. أرسمُ شكلًا يُبيِّنُ مواقعَ النقاطِ الثلاثِ.

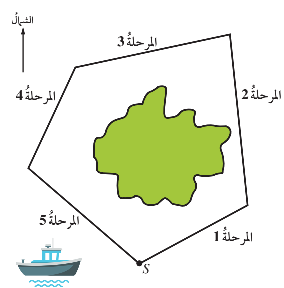
ملاحةٌ بحريةٌ: أبحرَ قاربٌ حولَ الأضلاعِ الأربعةِ لمربَّعٍ مساحتُهُ كيلو مترٍ مربَّعٌ واحدٌ: 10–9 أنظر ملحق الإجابات.

9 إذا بدأَ الإبحارَ في اتجاهِ الشمالِ، فما الاتجاهاتُ الثلاثةُ التاليةُ التي سلكَها حتّى أكملَ رحلتَهُ حولَ المربَّعِ باتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ؟

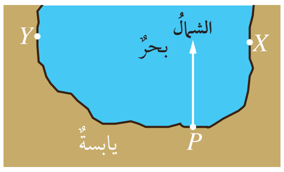
10 إذا بدأَ الإبحارَ في اتجاهِ 090°، فما الاتجاهاتُ الثلاثةُ التاليةُ التي سلكَها حتّى أكملَ رحلتَهُ حولَ المربَّعِ بعكسِ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ؟

11 **خرائطُ:** تُبيِّنُ الخريطةُ الآتيةُ رحلةَ قاربٍ حولَ إحدى الجُزرِ، بدأَتْ منَ الموقعِ S، وانتهَتْ عندَهُ. إذا كانَ كلُّ 1 cm على الخريطةِ يُمثِّلُ 20 km، فما طولُ كلِّ مرحلةٍ منْ مراحلِ الرحلةِ واتجاهُها؟ أنسخُ الجدولَ الآتيَ، ثمَّ أُكمِلُهُ:

المرحلةُ	المسافةُ الحقيقيةُ	الاتجاهُ
1	50 km	060°
2	70 km	355°
3	66 km	260°
4	46 km	204°
5	60 km	130°



موانئُ: يُبيِّنُ المُخطَّطُ المجاورُ الميناءَ P والمرفأيْنِ X وَ Y على الساحلِ:



12 أبحرَ قاربُ صيدٍ منَ الميناءِ P إلى المرفأِ X. ما اتجاهُ المرفأِ X منَ الميناءِ P؟ 035°

13 أبحرَ يختٌ منَ الميناءِ P إلى المرفأِ Y. ما اتجاهُ المرفأِ Y منَ الميناءِ P؟ 302°

116

4 التدريب

أتدرَّب وأحلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (9–1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (22 – 20).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (13 – 10) كتاب التمارين: (4–1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (19 – 14) كتاب التمارين: (7 – 5)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (22 – 17) كتاب التمارين: (9 – 7)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:
  » إذا كان اتجاه B من A هو °060، فما اتجاه A من B؟ (°240)
- أرسم مخططًا يُمثِّل المسألة، ثم أُكرِّر السؤال مُغيِّرًا الاتجاهات، مثل:
  °090 (°270)، °160 (°340)، °290، (°110)
- أكتب النتائج في جدول، ثــم أعرضه أمام الطلبة (قد يُلاحِظ الطلبة من ذوي المســتوى فوق المتوسط أنَّ الفرق بين كل اتجاهين هو °180).

نشاط التكنولوجيا:

- أُوجِّه الطلبة إلى البحث عن خريطة باســتعمال شبكة الإنترنــت، أو تطبيــق الخرائط فــي الهواتف الذكية (Google Map)، أو مصــادر المعرفة المتوافرة في المنزل أو مختبر الحاسوب، ثم تعيين موقعين عليها، وإيجاد اتجــاه أحدهما من الآخــر، مُوثِّقين الصورة باستعمال خاصية طباعة الشاشة، ثم عرضها مع الحل أمام المُعلِّــم/ المُعلِّمة، ثم الاحتفــاظ بها في ملف الأعمال.

تعليمات المشروع:

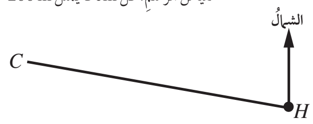
- أُوجِّه الطلبة إلى بدء تنفيذ الخطوة 1 من المشــروع، وصنــع الكلينومتــر وَفــق المواصفــات المطلوبة، والتحقّق من فاعلية الجهاز.
- أُذكِّر الطلبة بضرورة تضمين المشروع صورًا للجهاز، ومراحل صنعه.

6 الختام

- أطرح على الطلبة السؤالين الآتيين:
  » ما المقصود بالاتجاه من الشمال؟
  » كيف يمكن إيجاد اتجاه النقطة A من النقطة B؟
- أســتمع لإجابات أكبر عــدد ممكن مــن الطلبة، ثم أسألهم:
  » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  » ما هذه الإجابة؟

مواقعُ جغرافيةٌ: يُبيِّنُ المُخطَّطُ المجاورُ موقعَ بيتِ أريجَ عندَ النقطةِ H والناديَ الرياضيَّ الذي ترتادُهُ عندَ النقطةِ C:

مقياسُ الرسمِ: كلُّ 1 cm يُمثِّلُ 200 m

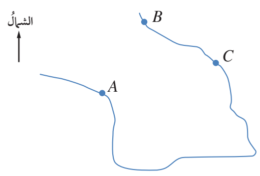


14 أَستعملُ مقياسَ الرسمِ المعطى لإيجادِ المسافةِ الحقيقيةِ بينَ بيتِ أريجَ والنادي الرياضيِّ. 1100m

15 أستعملُ منقلةً لإيجادِ اتجاهِ النادي منْ بيتِ أريجَ. °280

16 يبعدُ الســوقُ التجاريُّ S مســافةَ 600 m عنْ بيتِ أريجَ، وباتجاهِ °150 منْ بيتِها. أُعيِّنُ موقعَ السوقِ التجاريِّ S على نسخةٍ منَ المُخطَّطِ. أنظر ملحق الإجابات.

17 **ملاحــةٌ جويةٌ:** في أثناءِ تحليقِ طائرةٍ باتجاهِ °072، طُلِبَ إلى قائدِها التوجُّهُ إلى مطارٍ صوبَ الجنوبِ. ما الزاويةُ التي سيستديرُ بها؟ °108



18 **خرائطُ:** تُمثِّلُ A وَ B وَ C ثلاثَ قرًى تقعُ على رؤوسِ مربَّعٍ في خليجٍ ما. إذا كانَ اتجاهُ القريةِ B منَ القريةِ A هوَ °030، فما اتجاهُ القريةِ A منَ القريةِ C؟ أنظر ملحق الإجابات.

19 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. °20

مهارات التفكير العليا

20 **مســألةٌ مفتوحةٌ:** أرسمُ مثلثًا ذا قاعدةٍ أفقيةٍ أُســمّيهِ ABC، ثمَّ أقيسُ زواياهُ، ثمَّ أَجِدُ اتجاهَ A منْ B، واتجاهَ C منْ A، واتجاهَ C منْ B. أنظر ملحق الإجابات.

تحدٍّ: أبحرَتْ ســفينةٌ منَ الميناءِ P مسافةَ 57 km باتجاهِ الشمالِ، ثمَّ تحوَّلَتْ إلى اتجاهِ °045، وقطعَتْ مسافةَ 38 km. إذا كانَ موقعُ السفينةِ الحاليُّ هوَ S، فأَجِدُ:

21 SP. أنظر ملحق الإجابات.

22 اتجاهَ موقعِ السفينةِ منَ الميناءِ P. أنظر ملحق الإجابات.

إرشــاد: أُوجِّه الطلبة في أثناء حل السؤال 21 إلى رسم عمود من موقع الســفينة إلى امتداد خط الشــمال؛ لتكوين مثلثين قائمي الزاوية، ما يســاعدهم على تطبيق نظرية فيثاغورس عند إيجــاد طول SP، ثم أطلب إليهم استعمال النسب المثلثية لإيجاد اتجاه S من P.

الدرس 2


الدرس 2
قانونُ الجيوبِ
Law of Sines

فكرةُ الدرسِ استعمالُ قانونِ الجيوبِ لإيجادِ طولِ ضلعٍ، أوْ قياسِ زاويةٍ في مثلثٍ، عُلِمَ فيهِ ضلعانِ وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدِهِما، أوْ زاويتانِ وضلعٌ.

المصطلحاتُ حَلُّ المثلثِ، قانونُ الجيوبِ.

مسألةُ اليومِ إذا كانَتْ جرشُ والزرقاءُ ومأدبا تُشكِّلُ رؤوسَ مثلثٍ على الخريطةِ، والمسافةُ بينَ مدينتَي الزرقاءِ وجرشَ 44 km، وقياسُ الزاويةِ التي تقعُ عندَ رأسِها مدينةُ جرشَ 52°، وقياسُ الزاويةِ التي تقعُ عندَ رأسِها مدينةُ الزرقاءِ 93°، فهلْ يُمكِنُ بهذِهِ المعلوماتِ حسابُ المسافةِ بينَ مدينتَيْ جرشَ ومأدبا؟

يوجدُ في أيِّ مثلثٍ ستةُ قياساتٍ، هيَ: ثلاثةُ أضلاعٍ، وثلاثُ زوايا. وإيجادُ هذهِ القياساتِ يُعرَفُ باسمِ **حَلِّ المثلثِ** (solving a triangle)؛ إذْ تساعدُ قياساتُ الزوايا على حَلِّ المثلثاتِ في حالِ كانَتْ بعضُ قياساتِها معروفةً، وذلكَ باستعمالِ نسبةِ الجيبِ لإيجادِ علاقاتٍ بينَ أطوالِ الأضلاعِ.

ففي المثلثِ ABC المرسومِ جانبًا، يُمثِّلُ h الارتفاعَ منَ النقطةِ A؛ لذا فهوَ عموديٌّ على القاعدةِ $\overline{BC}$.

رموزٌ رياضيةٌ
تشيرُ الأحرفُ الكبيرةُ A, B, C إلى رؤوسِ المثلثِ وزواياهُ، في حينِ تشيرُ الصغيرةُ منْها a, b, c إلى أطوالِ الأضلاعِ. فمثلًا، طولُ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ A يشارُ إليْهِ بالحرفِ a، وهكذا.

يُمكِنُ الاستفادةُ منْ تعريفِ الجيبِ في استنتاجِ بعضِ العلاقاتِ كما يأتي:

$\sin B = \frac{h}{c}$ تعريفُ الجيبِ

$h = c\sin B$ بالضربِ التبادليِّ

$\sin C = \frac{h}{b}$ تعريفُ الجيبِ

$h = b\sin C$ بالضربِ التبادليِّ

$c\sin B = b\sin C$ بالمساواةِ $h = h$

$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$ بقسمةِ الطرفيْنِ على $\sin B$، ثمَّ على $\sin C$

118

نتاجات الدرس

- استنتاج قانون الجيوب.
- حل مثلث عُلِم منه طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما.
- حل مثلث عُلِم منه طول ضلع وقياس زاويتين.
- حل مسائل حياتية باستعمال قانون الجيوب.

نتاجات التعلُّم القبلي:

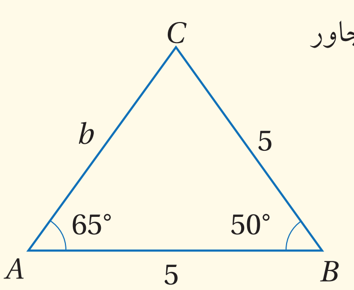
- إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا ضمن دورة واحدة.
- استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية.
- حل مسائل عن الاتجاه من الشمال.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أرسم المثلث المجاور على يمين اللوح.



- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » كيف يمكن إيجاد طول الضلع b؟
  - » هل يمكن استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاده؟ لماذا؟ لا؛ لأنَّ المثلث ليس قائمًا.
  - » ماذا يحدث إذا أسقطت عمودًا من الرأس C على AB؟ يتكوَّن مثلثان قائما الزاوية.
  - » كيف يمكن إيجاد AC؟ باستعمال النسب المثلثية في المثلث قائم الزاوية. $b\sin 50° = 5\sin 65°$
- أستمع لإجابات أكبر عدد ممكن من الطلبة، ثم أسألهم:
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  - » ما هذه الإجابة؟

2 الاستكشاف

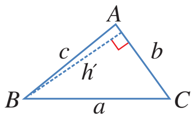
- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المســألة في بند (**مسألة اليوم**) ثم أسألهم:
  - » هل يمكن اســتعمال نظريــة فيثاغورس لإيجاد المسافة بين مأدبا والزرقاء؟ لا؛ لأنَّ المثلث غير قائم الزاوية.
  - » كيــف يمكن توظيف النســب المثلثية في إيجاد المسافة بين مأدبا والزرقاء؟
- أســتمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة عناصر المثلث، ومفهوم حل المثلث، ثم أسألهم:
  - » كم عنصرًا يلزم معرفته لحل المثلث؟ لماذا؟
- أستمع لإجابات الطلبة.
- أشرح للطلبة كيفية اشتقاق قانون الجيوب الوارد بداية الدرس في كتاب الطالب.
- أكتب على اللوح قانون الجيوب، ثم أسأل الطلبة:
  - » مــا الحالات التــي يمكن فيها اســتعمال قانون الجيوب؟
- أســتمع لإجابات أكبر عــدد ممكن مــن الطلبة، ثم أسألهم:
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  - » ما هذه الإجابة؟



وبالمثلِ، يُمكِنُ استنتاجُ العلاقتيْنِ الآتيتيْنِ عندَ رسمِ ارتفاعِ المثلثِ منَ النقطةِ B بشكلٍ عموديٍّ على AC، أوْ رسمِ ارتفاعِهِ منَ النقطةِ C عموديًّا على AB.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

عندَ دمجِ هذهِ العلاقاتِ الثلاثِ معًا، ينتجُ **قانونُ الجيوبِ** (law of sines).

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

إرشادٌ

توجدُ صيغةٌ أُخرى لقانونِ الجيوبِ هيَ:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

يُستعمَلُ قانونُ الجيوبِ لحَلِّ المثلثِ الذي عُلِمَتْ ثلاثةٌ من قياساتِهِ، وذلكَ في الحالتيْنِ الآتيتيْنِ:

1. ضلعٌ واحدٌ وزاويتانِ (ASA، أوْ SAA).
2. ضلعانِ وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدِهِما (SSA).

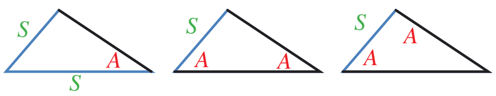
أفكر

لمــاذا يتعــذَّرُ حَلُّ المثلــثِ الذي عُلِمَتْ فقطْ قياساتُ زواياهُ جميعًا؟

إرشادٌ

- الحــرفُ S هــوَ اختصارٌ لكلمــةِ Side، وتعنــي الضلعَ.
- الحــرفُ A هــوَ اختصارٌ لكلمــةِ Angle، وتعنــي الزاويةَ.

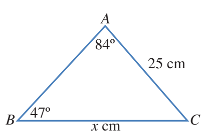
يُبيِّنُ الشكلُ الآتي هاتيْنِ الحالتيْنِ:



الحالةُ 1 ASA | الحالةُ 1 SAA | الحالةُ 2 SSA

مثال 1

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ ABC.



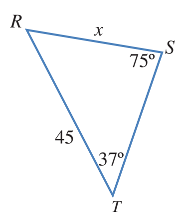
$$\frac{x}{\sin 84°} = \frac{25}{\sin 47°}$$ قانونُ الجيوبِ

$$x = \frac{25 \sin 84°}{\sin 47°}$$ بضربِ الطرفيْنِ في $\sin 84°$

$$\approx 34 \text{ cm}$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ RST المُبيَّنِ جانبًا. $x = 28.037$

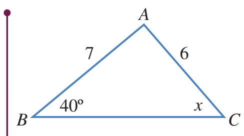


تنويع التعليم:

قد يكون اشتقاق القانون غير واضح للطلبة ذوي المستوى دون المتوسط؛ لذا أُوضِّحه لهم بالرجوع إلى الرسم الموجود على يمين اللوح (في بند التهيئة)، ثم أطلب إليهم كتابة النتيجة $b \sin 50° = 5 \sin 65°$ بالرموز بدلًا من الزوايا °65، °50، مُبيِّنًا لهم العلاقة: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.

يُمكِنُ أيضًا استعمالُ قانونِ الجيوبِ لإيجادِ قياسِ زاويةٍ مجهولةٍ في المثلثِ.

مثال 2



أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ ABC.

قانونُ الجيوبِ $\frac{\sin x}{7} = \frac{\sin 40°}{6}$

بضربِ الطرفَيْنِ في 7 $\sin x = \frac{7\sin 40°}{6}$

≈ 0.7499

معكوسُ الجيبِ $x = \sin^{-1}(0.7499)$

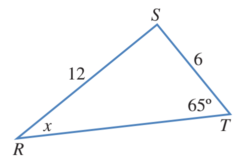
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $\approx 48.6°$

أَتعلَّمُ

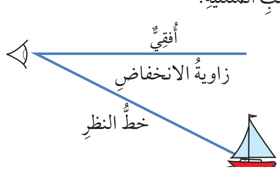
توجدُ قيمتانِ لـ 0.7499 $\sin^{-1}$ ضمنَ الدورةِ الواحدةِ هُما °48.6 و °131.4، نختارُ مِنْهما القيمةَ °48.6؛ لأنَّ الزاويةَ x تبدو حادَّةً في الشكلِ المُعطى.

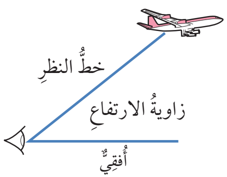
أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ RST. 26.95



عندما أنظرُ إلى طائرةٍ في السماءِ، فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بينَ الخطِّ الواصلِ بينَ عيني والطائرةِ وخطٍّ نظري أفقيًّا تُسـمّى **زاويةَ الارتفاعِ**. وإذا وقفْتُ على تَلَّةٍ سـاحليةٍ، ثُمَّ نظرْتُ إلى قاربٍ أسـفلَ منّي، فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بينَ الخطِّ الواصلِ بيـنَ عيني والقاربِ وخطٍّ نظري أفقيًّا تُسـمّى **زاويةَ الانخفاضِ**. ولهاتيْنِ الزاويتيْنِ أهميةٌ كبيرةٌ عندَ حَلِّ المسائلِ الحياتيةِ باستعمالِ النسبِ المثلثيةِ.





مثال 3: من الحياة

يقعُ برجٌ ارتفاعُهُ h مترٌ على تلَّةٍ، وقدْ رُصِدَتْ قمَّةُ البرجِ A منَ النقطةِ B التي تبعدُ عنْ قاعدةِ البرجِ 25 m فكانَ قياسُ زاويةِ ارتفاعِها °50 ، ثمَّ رُصِدَتْ قمَّةُ التلَّةِ منَ النقطةِ B نفسِها بزاويةِ ارتفاعٍ مقدارُها °20. ما ارتفاعُ البرجِ h؟

إرشادات:

- يستعمل الطلبة في المثال 2 معكوس الجيب؛ لذا أُوجِّههم إلى استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد الناتج، وأُذكِّرهم بطريقة استعمالها.
- أُركِّز على تطوير مهارات الطلبة في اسـتعمال الآلة الحاسبة في دروس هذه الوحدة؛ فذلك من المهارات الحياتية الأساسية.

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 اعتمادًا على الشكل المرفق، وأُدرِّبهم على اختيار العلاقة المناسبة بين عناصر المثلث المعطاة لإيجاد طول الضلع المطلوب.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

أخطاء شائعة:

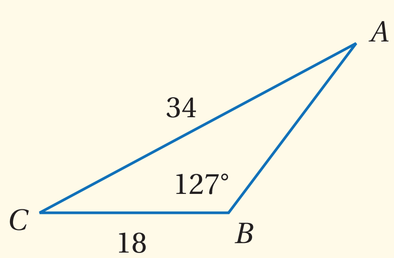
قد يُخطِئ بعض الطلبة في حل التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي)، فيستعملون نظرية فيثاغورس؛ لذا أُذكِّرهم أنَّ المثلث ليس قائم الزاوية.

مثال 2

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 اعتمادًا على الشكل المرفق، وأُدرِّبهم على اختيار العلاقة المناسبة بين عناصر المثلث المعطاة لإيجاد قياس الزاوية المطلوبة.

مثال إضافي:

- أجد قياس الزاوية A. 25°



مثال 3: من الحياة

- أُذكِّر الطلبة بمفهوم زاويــة الارتفاع، ثم أطلب إليهم ذكر أمثلة من الحياة على ذلك.
- أُناقِــش الطلبة في حل المثال 3 الذي يُبيِّن اســتخدام قانون الجيوب في موقف حياتي.

تنويع التعليم:

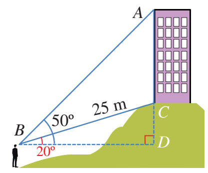
قد لا يتمكَّن الطلبة ذوو المســتوى دون المتوسط من فهم المســألة؛ لذا أُحاوِل تطبيق الموقف عمليًّا لتسهيل عملية الفهم.

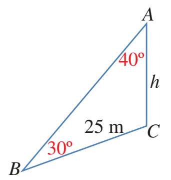
مثال 4: من الحياة

- أُذكِّر الطلبــة بمفهوم الاتجاه من الشــمال قبل البدء بشرح المثال 4
- أُناقِــش الطلبة في حل المثال 4 الــذي يعرض تطبيقًا على قانون الجيوب والاتجاه من الشمال معًا، مستعينًا بالرسم المرفق.

تنويع التعليم:

قـد لا يتمكَّـن الطلبـة ذوو المسـتوى دون المتوسـط مـن فهـم المثـال؛ لـذا أسـرد لهـم قصـة تُوضِّحـه.





أجِدُ أولًا قياسَ الزاويةِ ABC:

$$m\angle ABC = 50° - 20° = 30°$$

ثمَّ أجِدُ قياسَ الزاويةِ BAD:

$$m\angle BAC = 180° - 90° - 50° = 40°$$

ارتفاعُ البرجِ هوَ طولُ الضلعِ AC في المثلثِ BAC. أستعملُ قانونَ الجيوبِ لحَلِّ هذا المثلثِ.

بعدَ ذلكَ أستعملُ قانونَ الجيوبِ في المثلثِ BAC لإيجادِ ارتفاعِ البرجِ:

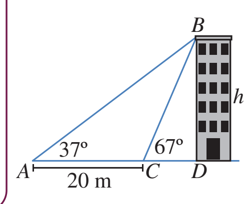
قانونُ الجيوبِ $$\frac{h}{\sin 30°} = \frac{25}{\sin 40°}$$

بضربِ الطرفيْنِ في $\sin30°$ $$h = \frac{25 \sin30°}{\sin 40°}$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $$h \approx 19.45 \text{ m}$$

إذنْ، ارتفاعُ البرجِ هوَ: 19.45 m

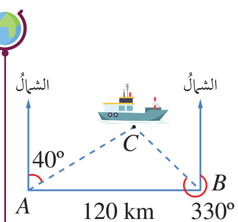
أتحقق من فهمي



رصدَ ليثٌ زاويةَ قمَّةِ بنايةٍ منَ النقطةِ A، فكانَتْ $37°$، ثمَّ سارَ مسافةَ 20 m باتجاهِ البنايةِ حتّى النقطةِ C، ثمَّ رصدَ زاويةَ قمَّةِ البنايةِ بزاويةِ ارتفاعٍ مقدارُها $67°$. أجِدُ ارتفاعَ البنايةِ.

الارتفاع هو 22 m تقريبًا.

مثال 4: من الحياة



التقطَتْ محطتّا خفرِ السواحلِ A وَ B نداءَ استغاثةٍ مِنْ سفينةٍ عندَ النقطةِ C في البحرِ، وقدْ حدَّدَتِ المحطّةُ A اتجاهَ السفينةِ عندَ $040°$، وحدَّدَتِ المحطّةُ B اتجاهَ السفينةِ عندَ $330°$. إذا كانَتْ B شرقيَّ A وكانتِ المسافةُ بينَ المحطّتيْنِ 120 km، فكمْ تبعدُ السفينةُ عنِ المحطّةِ A؟

يجبُ أولًا إيجادُ قياسِ الزاويةِ C:

قياسُ الزاويةِ BAC هوَ $50°$ (لأنَّها مُتمِّمةٌ للزاويةِ التي قياسُها $40°$).

وقياسُ الزاويةِ ABC هوَ $60°$ (لأنَّ $60° = 270° - 330°$). إذنْ:

$$m\angle ACB = 180° - 60° - 50° = 70°$$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (10–1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيٍّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (16 – 14).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 12 ,11 كتاب التمارين: (4 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (14 – 12) كتاب التمارين: (10 – 5)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (16 – 13) كتاب التمارين: (12 – 9)

ثمَّ استعمالُ قانونِ الجيوبِ:

قانونُ الجيوبِ
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

بالتعويضِ
$$\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{120}{\sin 70^\circ}$$

بضربِ الطرفيْنِ في $\sin 60^\circ$
$$b = \frac{120 \times \sin 60^\circ}{\sin 70^\circ}$$

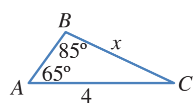
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ
$$\approx 110.59 \text{ km}$$

أتحقق من فهمي

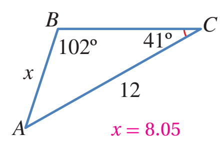
أَجِدُ بُعْدَ السفينةِ عنِ المحطَّةِ **B** في المثالِ السابقِ. 97.8 km

أتدرب وأحل المسائل

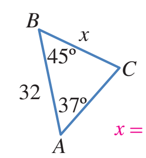
أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

1


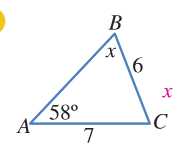
$x = 3.639$

2


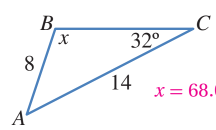
$x = 8.05$

3


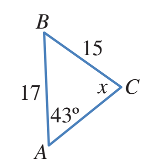
$x = 19.45$

4


$x = 81.65^\circ$

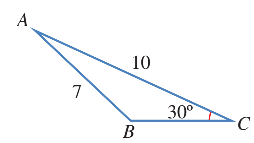
5


$x = 68.03^\circ$

6


$x = 50.62^\circ$

7 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ المنفرجةِ CBA في الشكلِ المجاورِ.
$B = 180^\circ - 45.58^\circ = 134.42^\circ$



8 **خرائطُ**: أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.
76.6 km

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة رسم مثلثين، عُلِم في كلٍّ منهما زاويتان وضلع؛ أحدهما حاد الزوايا، والآخر منفرج الزاوية، وتطبيق قانون الجيوب لحل المثلث، مراعين خصائص المثلثات التي تعلَّموها سابقًا للحكم على معقولية السؤال.
- أطلب إلى الطلبة اشتقاق قانون الجيوب بطريقة مختلفة عن تلك الواردة في بداية الدرس.

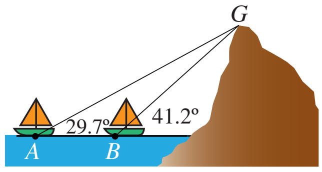
نشاط التكنولوجيا:

- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية لقانون الجيوب، مثل استعماله لفرز الأراضي، مُذكِّرًا إيّاهم بضرورة توثيق مصدر معلوماتهم.

تعليمات المشروع:

- أُوجِّه الطلبة إلى استكمال الخطوة 1 من المشروع؛ لمَنْ لم يُنْهِ صنع الجهاز الخاص به.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكنهم البدء بتنفيذ الخطوة 2، وأنَّه يتعيَّن على الذين طبَّقوا قانون الجيوب على المثلثات التأكُّد من نتائج حساباتهم جبريًّا، وباستعمال برمجية جيوجبرا.

9 **بِحارٌ:** ترصدُ سفينتانِ في البحرِ قمَّةَ جبلٍ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَتِ المسافةُ بينَ السفينتيْنِ 1473 m، فما ارتفاعُ الجبلِ منْ مستوى سطحِ البحرِ؟



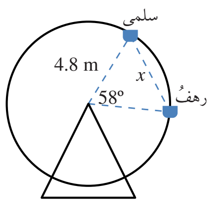
$$BG = \frac{1473 \sin (29.7)}{\sin (11.5)} = 3660.6 \text{ m}$$

$$h = \frac{3660.6 \sin (41.2)}{\sin (90)} = 2411.2 \text{ m}$$

10 **علمُ الفَلكِ:** رصدَ عامرٌ وهشامٌ منْ منزليْهِما نجمًا في السماءِ في اللحظةِ نفسِها. إذا كانَتْ زاويةُ رصدِ هشامٍ للنجمِ 49.8974°، وزاويةُ رصدِ عامرٍ لهُ 49.9312°، والمسافةُ بينَ منزليْهِما 300 km، فأُقدِّرُ بُعْدَ النجمِ عنِ الأرضِ.

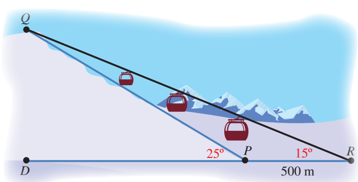
297675km تقريبًا

11 **مدينةُ الألعابِ:** في مدينةِ الألعابِ، جلسَتْ سلمى ورهفُ على مقعديْنِ منفصليْنِ في لعبةِ الدولابِ الدوّارِ كما في الشكلِ المجاورِ. أَجِدُ المسافةَ x بينَهُما.



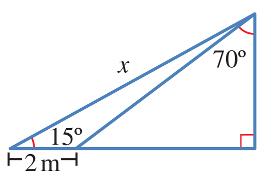
$x = 4.65$ m

12 **رياضةُ التزلُّجِ:** يتكوَّنُ مسارُ تزلُّجٍ منْ جزءٍ مائلٍ، وآخرَ مستقيمٍ. إذا تزلَّجَ محمودٌ منَ النقطةِ Q إلى النقطةِ P، ثمَّ وصلَ خطَّ النهايةِ عندَ النقطةِ R، وكانَتْ زاويةُ ارتفاعِ مسارِ التزلُّجِ عنِ الأرضِ 25°، والمسافةُ بينَ النقطتيْنِ P وَ R هيَ 500 m، وزاويةُ رصْدِ الحَكَمِ منْ نقطةِ النهايةِ للمُتزلِّجِ الذي يقفُ عندَ نقطةِ البدايةِ 15°، فما طولُ QP؟



$QP = 745.24$ m

13 أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ المجاورِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ.



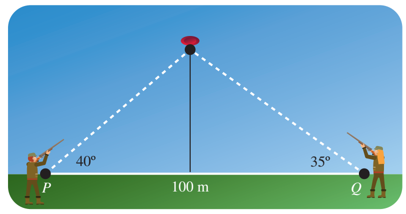
$x = 7.8$

6 الختام

- أطلب إلى بعض الطلبة كتابة العلاقات المختلفة لقانون الجيوب على اللوح.
- أطلب إلى الطلبة رسم مثلث على ورقة (أو ألواح صغيرة)، ثم تلوين الزوايا والأضلاع المعلومة فيه بلون أزرق مثلًا، وتلوين الضلع أو الزاوية المطلوبة بلون آخر (أحمر مثلًا)، ثم كتابة الصورة المناسبة من القانون التي تُمكِّنهم من حل السؤال.
- أطلب إلى الطلبة رفع أوراقهم عاليًا، وأُتابِعهم في هذه الأثناء.

مهارات التفكير العليا

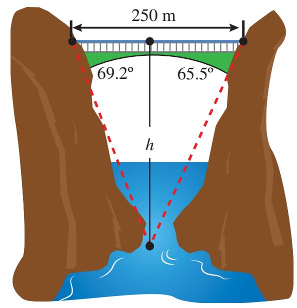
14 **تبرير**: أطلقَ قنّاصٌ وقنّاصةٌ النارَ على هدفٍ مُتحرِّكٍ في السماءِ في لحظةٍ ما. إذا كانَتْ زاويةُ إطلاقِ القنّاصِ $40°$، وزاويةُ إطلاقِ القنّاصةِ $35°$، والمسافةُ بينَهُما 100 m، فأيُّهُما سيصيبُ الهدفَ أولًا؟ أُبرِّرُ إجابتي.



المسافة بين القنّاص والهدف هي 59.38 m، والمسافة بين القنّاصة والهدف هي 66.55 m
إذن، القنّاص سيصيب الهدف أوّلًا؛ لأنَّ المسافة بينه وبين الهدف أقل.

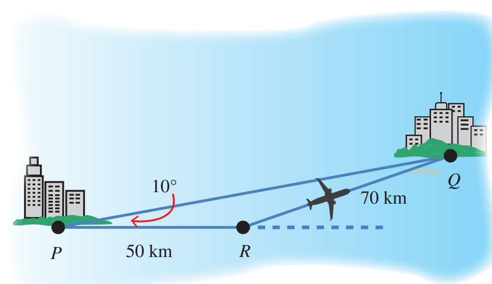
15 **تحدٍّ**: مرَّ قاربٌ أسفلَ جسرٍ طولُهُ 250 m. وقدْ رصدَ الشخصُ الذي في القاربِ الزاويتيْنِ اللتيْنِ تقعانِ عندَ طرفَيِ الجسرِ، فكانَتا $69.2°$ وَ $65.5°$. أَجِدُ ارتفاعَ الجسرِ عنِ القاربِ.

$h = 299.19$ m



16 **تبرير**: توجَّهَتْ طائرةٌ منَ المدينةِ P إلى المدينةِ Q، وبعدَ أنْ قطعَتْ مسافةَ 50 km أدركَ الطيّارُ وجودَ خطأٍ في زاويةِ الانطلاقِ مقدارُهُ $10°$، فاستدارَ في الحالِ، وقطعَتِ الطائرةُ مسافةَ 70 km حتّى وصلَتِ المدينةَ Q. إذا كانَتْ سرعةُ الطائرةِ ثابتةً وتساوي 250 km/h، فما الوقتُ الإضافيُّ الذي استغرقَهُ الطيّارُ بسببِ خطئِهِ في زاويةِ الانطلاقِ؟

أنظر الهامش.



إجابة سؤال 16:

$$\frac{\sin 10°}{70} = \frac{\sin Q}{50} \Rightarrow Q \approx 7.12°$$

$$m\angle R \approx 180° - 10° - 7.12° \approx 162.88°$$

$$\frac{70}{\sin 10°} = \frac{PQ}{\sin 162.88°} \Rightarrow PQ \approx 118.7 \text{ km}$$

المسافة التي قطعتها الطائرة هي 120 km

المسافة الإضافية هي 1.3 km، والزمن الإضافي هو

$$\frac{1.3}{250} \times 60 \text{ min} \approx 0.3 \text{ min} \approx 18.7 \text{ s}$$

الدرس 3

نتاجات الدرس

- استنتاج قانون جيوب التمام.
- حـل مثلث عُلِـم منه طـولا ضلعين وقيـاس زاوية محصورة بينهما.
- حل مثلث عُلِمت أطوال أضلاعه جميعًا.
- حل مسائل حياتية باستعمال قانوني الجيوب وجيوب التمام.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إيجاد النسب المثلثية الأساسـية للزوايا ضمن دورة واحدة.
- استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية.
- حل مسائل على الاتجاه من الشمال.
- استعمال قانون الجيوب لحل المثلث.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سـيُقدَّم من موضوعـات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أسـتعد لدراسة الوحدة) في كتـاب التمارين، ثم أطلـب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلـى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرسُ 3

قانونُ جيوبِ التمامِ
Law of Cosines

فكرةُ الدرسِ استعمالُ قانونِ جيوبِ التمامِ لإيجادِ طولِ ضلعٍ، أوْ قياسِ زاويةٍ في مثلثٍ.

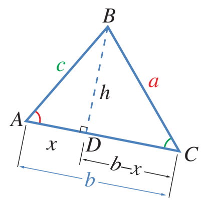
المصطلحاتُ قانونُ جيوبِ التمامِ.

مسألةُ اليومِ انطلقَتْ حافلتانِ منْ محطَّةٍ واحدةٍ في الوقتِ نفسِـهِ، وقدِ اتَّجهَتِ الأولى شرقًا بسـرعةِ 60 km/h ، وانطلقَتِ الثانيةُ في مسارٍ يَصنعُ زاويةَ 30° معَ مسـارِ الحافلةِ الأولى بسرعةِ 50 km/h. هلْ يُمكِنُ حسابُ المسافةِ بينَ الحافلتيْنِ بعدَ مُضيِّ 3 ساعاتٍ على انطلاقِهِما؟

تعرَّفْتُ في الدرسِ السـابقِ قانونَ الجيوبِ، وكيفَ يُستعمَلُ لحَلِّ مثلثاتٍ عُلِمَ فيها ضلعٌ واحدٌ وزاويتانِ (ASA، أوْ SAA)، أوْ ضلعانِ وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدِهِما (SSA).

تُستعمَلُ أيضًا نسبةُ جيبِ التمامِ لإيجادِ علاقاتٍ أُخرى بينَ أطوالِ الأضلاعِ وقياساتِ الزوايا؛ ما يساعدُ على حَلِّ بعضِ المثلثاتِ التي لا يُمكِنُ حَلُّها باستعمالِ قانونِ الجيوبِ.

ففي الشـكلِ المجاورِ، يُمثِّلُ h الارتفاعَ المرسومَ منْ B عموديًّا على AC. وباستعمالِ نظريةِ فيثاغورس وتعريفِ جيبِ التمامِ، يُمكِنُ استنتاجُ بعضِ العلاقاتِ على النحوِ الآتي:



باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس في المثلثِ ADB	$h^2 = c^2 - x^2$
باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس في المثلثِ BDC	$h^2 = a^2 - (b-x)^2$
بمساواةِ المعادلتيْنِ $h^2 = h^2$	$c^2 - x^2 = a^2 - (b-x)^2$
بفكِّ القوسِ	$c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2xb - x^2$
بالتبسيطِ	$a^2 = b^2 + c^2 - 2xb$

لإدخالِ جيبِ التمامِ في المعادلةِ: $a^2 = b^2 + c^2 - 2xb$ ، فإنَّنا نكتبُ x بدلالةِ $\cos A$:

تعريفُ جيبِ التمامِ	$\cos A = \frac{x}{c}$
بالضربِ التبادليِّ	$x = c \times \cos A$
بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

1 التهيئة

- أسأل الطلبة عن الحالات التي يمكن فيها استعمال قانون الجيوب لإيجاد طول ضلع، أو قياس زاوية مجهولة في مثلث. إذا عُلِم في المثلث ضلعان وقياس زاوية مقابلة لأحدهما، أو عُلِم فيه قياسا زاويتين وضلع بينهما.
- أرسم مثلثين، أحدهما عُلِمت جميع أضلاعه، والآخر عُلِم منه ضلعان وزاوية محصورة، ثم أطلب إلى الطلبة إيجاد ضلع أو زاوية مجهولة في كلٍّ منهما.
- أطلب إلى الطلبة تخمين موضوع الدرس.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**).
- أطلب إلى أحد الطلبة رسم المثلث الذي يُمثِّل المسألة.
- أطرح على الطلبة السؤالين الآتيين:
  - » ما الضلع المجهول في الرسم؟ الضلع الواصل بين موقع الحافلتين بعد 3 ساعات.
  - » هل يمكن استعمال قانون الجيوب لإيجاده؟ لا؛ لأنَّ الزاوية المعلومة محصورة بين الضلعين المعلومين، ولأنَّه ينتج من تطبيق قانون الجيب معادلة فيها مجهولان.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة كيفية اشتقاق قانون جيوب التمام الوارد بداية الدرس في كتاب الطالب، مُبيِّنًا علاقات القانون الثلاث، ثم أكتبها على اللوح.

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1، وأُدرِّبهم على استعمال القانون لإيجاد طول الضلع الثالث في المثلث، مُركِّزًا على اختيار العلاقة المناسبة بين القياسات المعطاة.

تنويع التعليم:

قد تكون خطوات اشتقاق القانون غير واضحة للطلبة ذوي المستوى دون المتوسط؛ لذا أُوضِّحها لهم بعرض مثال على مثلث عُلِمت جميع أطوال أضلاعه وقياسات زواياه، مُطبِّقًا قانون جيوب التمام للتحقُّق من صحة خطوات اشتقاق قانون جيوب التمام.

ملاحظاتي

التقويم التكويني:

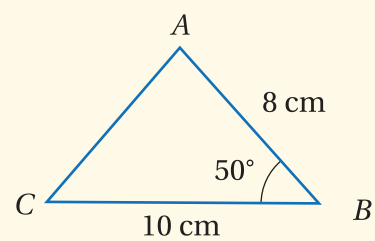
أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

أخطاء مفاهيمية:

قد يُخطِئ بعض الطلبة في حل التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي)، فيستعملون نظرية فيثاغورس أو قانون الجيوب؛ لذا أُذكِّرهم بخطوات الحل عند استعمال نظرية فيثاغورس، أو قانون الجيوب.

مثال إضافي:

- أجد CA في الشكل الآتي. 7.82 cm



وبذلك، نتوصَّلُ إلى العلاقةِ الآتيةِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ وقياساتِ زواياهُ باستعمالِ جيبِ التمامِ:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

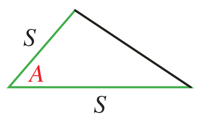
وبطريقةٍ مشابهةٍ، يُمكِنُ التوصُّلُ إلى العلاقتيْنِ الآتيتيْنِ:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

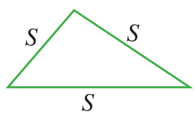
تُسمّى هذهِ العلاقاتُ الثلاثُ **قانونَ جيوبِ التمامِ** (Law of Cosines)، ويُستعمَلُ هذا القانونُ لحَلِّ أيِّ مثلثٍ عُلِمَتْ ثلاثةٌ من قياساتِهِ في الحالتيْنِ الآتيتيْنِ:

1. ضلعانِ وزاويةٌ محصورةٌ بينَهُما (SAS).
2. ثلاثةُ أضلاعٍ (SSS).



الحالةُ (1)

SAS



الحالةُ (2)

SSS

أتعلَّمُ

يُمكِنُ كتابةُ قانونِ جيوبِ التمامِ كما يأتي:

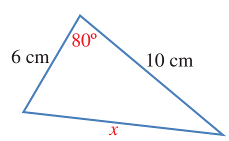
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

مثال 1

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ المجاورِ.

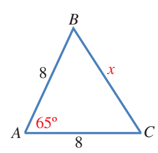


$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \cos 80°$	قانونُ جيوبِ التمامِ
$x^2 = 115.16$	باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ
$x = \pm\sqrt{115.16}$	بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ
$x = \pm 10.7\text{ cm}$	باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، $x = 10.7$؛ لأنَّ قيمةَ x لا يمكِنُ أنْ تكونَ سالبةً.

أتحقق من فهمي

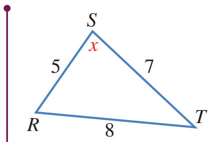
أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ المجاورِ. 8.6



يُستعمَلُ قانونُ جيوبِ التمامِ أيضًا لإيجادِ قياسِ زاويةٍ مجهولةٍ في المثلثِ.

مثال 2

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ RST المجاورِ.



قانونُ جيوبِ التمامِ	$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \cos x$
بكتابةِ $\cos x$ موضوعِ القانونِ	$\cos x = \dfrac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 7}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$\cos x = 0.1428$
معكوسُ جيبِ التمامِ	$x = 81.8^\circ$

أتحقق من فهمي

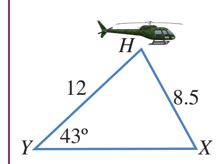
انظر ملحق الإجابات

في المثلّثِ ABC، إذا كانَ $AB = 16, BC = 12, AC = 20$ فأُثبِتُ أنَّ الزاويةَ B قائمةٌ.

قدْ نحتاجُ في بعضِ المسائلِ إلى استعمالِ قانونَيِ الجيوبِ وجيوبِ التمامِ معًا لإيجادِ القياساتِ المطلوبةِ.

مثال 3: من الحياة

شوهِدَتْ طائرةٌ مروحيةٌ تُحلِّقُ في السماءِ منَ القريتيْنِ X وَ Y في اللحظةِ نفسِها. إذا كانَ بُعْدُ الطائرةِ عنِ القريةِ X هوَ 8.5 km، وعنِ القريةِ Y هوَ 12 km، وكانَتِ القريتانِ في مستوًى أفقيٍّ واحدٍ، وزاويةُ ارتفاعِ الطائرةِ منَ القريةِ Y هيَ 43°، فما المسافةُ بينَ هاتيْنِ القريتيْنِ؟



لإيجادِ المسافةِ بينَ القريتيْنِ، يجبُ معرفةُ قياسِ الزاويةِ بينَ الضلعيْنِ اللذيْنِ يُمثِّلانِ بُعْدَيِ الطائرةِ عنِ القريتيْنِ كما يأتي:

الخطوةُ 1: استعمالُ قانونِ الجيوبِ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ X في المثلثِ HYX.

قانونُ الجيوبِ	$\dfrac{\sin 43^\circ}{8.5} = \dfrac{\sin X}{12}$
بضربِ الطرفيْنِ في 12	$\sin X = \dfrac{12 \sin 43^\circ}{8.5}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$\sin X \approx 0.963$
معكوسُ sin	$X = \sin^{-1} 0.963$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$\approx 74.3^\circ$

أتعلَّمُ

توجدُ قيمتانِ لـ $\sin^{-1} 0.963$ ضمنَ الدورةِ الواحدةِ هُما 74.3° و 105.6°، نختارُ منهما القيمةَ 74.3°؛ لأنَّ الزاويةَ x تبدو حادَّةً في الشكلِ المُعطى.

الخطوةُ 2: إيجادُ قياسِ الزاويةِ H.

مثال 2

- أرسم على اللوح مثلثًا، ثم أسأل الطلبة:
  - » إذا عُلِمت أطوال أضلاع المثلث الثلاثة، فكيف يمكن إيجاد إحدى زواياه؟
- أطلب إلى أحد الطلبة أنْ يكتب العلاقة المناسبة لإيجاد الزاوية المجهولة، ثم أطلب إلى زملائه أنْ يكتبوا على اللوح العلاقة بصورة أخرى، بحيث تكون نسبة جيب التمام موضوعًا للقانون. بعد ذلك أطلب إلى آخرين كتابة العلاقات الأخرى على اللوح.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2، مُركِّزًا على تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

إرشادات:

- يتعيَّن على الطلبة في المثال 2 استعمال معكوس جيب التمام؛ لذا أُوجِّههم إلى استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد الناتج.
- أُنبِّه الطلبة إلى أنَّ تقريب الإجابة في الخطوات التي تسبق الخطوة النهائية قد يجعل الإجابة النهائية غير دقيقة.
- أطلب إلى الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط تقريب إجاباتهم في الخطوات قبل النهائية إلى العدد المناسب من المنازل بحيث تحوي 4 أرقام.

مثال 3: من الحياة

- أرسم على اللوح مثلثًا، ثم أُعيِّن عليه ضلعين وزاوية غير محصورة، وأُخبِر الطلبة أنَّ المطلوب هو إيجاد الزاوية المحصورة، ثم أسألهم:
  - » كيف يمكن إيجاد قياس الزاوية المحصورة؟ بتطبيق قانون الجيوب أوَّلًا، ثم قانون جيوب التمام.
- أستمع لإجابات الطلبة، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3، مُذكِّرًا إيّاهم بضرورة اختيار القوانين ذات الرموز الصحيحة التي تناسب معطيات المسألة ومطلوبها.

تنبيه: قد يُخطِئ بعض الطلبة في أولويات العمليات الحسابية في أثناء الحل؛ لذا أُذكِّرهم بالأولويات، ثم أُرشِدهم إلى التحقُّق من صحة الحل باستعمال الآلة الحاسبة، وأُدرِّبهم على استعمالها بصورة صحيحة.

مجموعُ قياسِ زوايا المثلثِ 180°　$m\angle H = 180^\circ - 43^\circ - 74.3^\circ = 62.7^\circ$

الخطوةُ 3: استعمالُ قانونِ جيوبِ التمامِ لإيجادِ المسافةِ بينَ القريتيْنِ.

قانونُ جيوبِ التمامِ　$(XY)^2 = 12^2 + 8.5^2 - 2\,(12)\,(8.5)\cos 62.7^\circ$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ　$(XY)^2 = 122.7$

بحسابِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ　$XY = \pm\sqrt{122.7} = \pm 11.1$

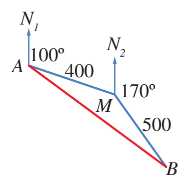
إذنْ، المسافةُ بينَ المدينتيْنِ 11.1 km تقريبًا.

أتحقق من فهمي

سفنٌ: أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ A باتجاهِ الشمالِ، فقطعَتْ مسافةَ 240 km، ثمَّ انحرفَتْ بزاويةِ 50°، وقطعَتْ مسافةَ 160 km حتّى وصلَتْ إلى الميناءِ B. ما المسافةُ بينَ الميناءِ A والميناءِ B؟ 364 km

مثال 4: من الحياة

أقلعَتْ طائرةٌ بزاويةِ 100° عنِ الشمالِ منَ المدينةِ A، فقطعَتْ مسافةَ 400 km، ثمَّ انعطفَتْ يمينًا، فأصبحَتِ الزاويةُ بينَ خطِّ مسارِها الجديدِ والشمالِ 170°، ثمَّ قطعَتْ مسافةَ 500 km لتصلَ إلى المدينةِ B. ما المسافةُ بينَ هاتيْنِ المدينتيْنِ؟



يُمكِنُ حسابُ المسافةِ بينَ المدينتيْنِ (طولُ القطعةِ المستقيمةِ AB) بإيجادِ قياسِ الزاويةِ AMB.

منَ المُلاحَظِ أنَّ الزاويةَ AMN_2 مُكمِّلةٌ للزاويةِ MAN_1، وهيَ تساوي 80°.

مجموعُ الزوايا حولَ نقطةٍ　$m\angle AMB = 360^\circ - (80^\circ + 170^\circ) = 110^\circ$

قانونُ جيوبِ التمامِ　$(AB)^2 = (400)^2 + (500)^2 - 2 \times 400 \times 500 \cos 110^\circ$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ　$(AB)^2 = 546808.0573$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ　$AB = \sqrt{546808.0573} \approx 739.5$

إذنْ، المسافةُ بينَ المدينتيْنِ 739.5 km تقريبًا.

أتحقق من فهمي

سارَ قطارٌ منَ المحطَّةِ A في اتجاهِ 080° إلى المحطَّةِ B التي تبعدُ عنْها 120 km، ثمَّ تَحوَّلَ إلى اتجاهِ 070°، وسارَ مسافةَ 90 km إلى المحطَّةِ C. ما المسافةُ بينَ المحطَّةِ A والمحطَّةِ C؟ 209.2 km

مثال 4: من الحياة

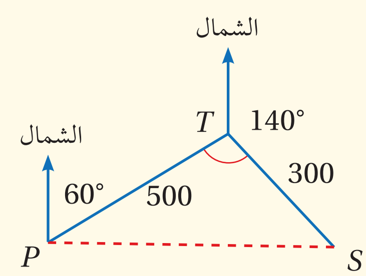
- أُراجِع الطلبة في درس (الاتجاه من الشمال) قبل شرح المثال 4.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 الذي يُبيِّن كيف يُستعمَل قانون جيوب التمام والاتجاه من الشمال في موقف حياتي.

تنويع التعليم:

- قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في إيجاد ناتج الحسابات؛ لذا أُوجِّههم إلى حل السؤال ضمن مجموعات، والاستعانة بأحد الزملاء من ذوي المستوى المتوسط أو فوق المتوسط.
- قد يواجه الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في إيجاد قياس الزاوية التي تُمكِّنهم من حل السؤال؛ لذا أُدرِّبهم على مزيد من الأمثلة، مُؤكِّدًا ضرورة رسم الحالة بنموذج بسيط يُمثِّلها.

مثال إضافي:

- أجد PS في الشكل الآتي.



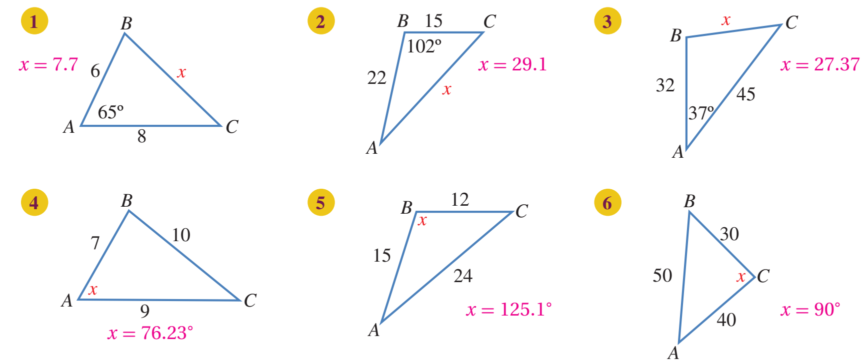
$m\angle STP = 360^\circ - (120^\circ + 140^\circ) = 100^\circ$

$(PS)^2 = 500^2 + 300^2 - 2(500)(300)\cos 100^\circ$

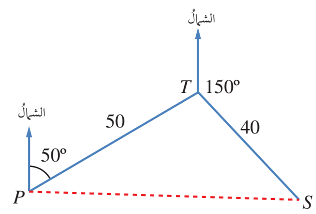
$\approx 392049.5 \;\Rightarrow\; PS \approx 626.2$

أتدرب وأحل المسائل

أجِدُ قيمة x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

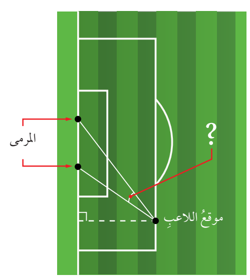


7 **ملاحةٌ جويةٌ:** أبحرَتْ سفينةٌ منْ أحدِ الموانئِ مسافةَ 50 km في اتجاهِ 050°، ثمَّ غيَّرَ القبطانُ خطَّ سيرِها إلى اتجاهِ 150° وقطعَتْ مسافةَ 40 km، ثمَّ توقَّفَتْ بسببِ إصابةِ أحدِ أفرادِ الطاقمِ. ما المسافةُ التي ستقطعُها مروحيةُ الإنقاذِ منَ الميناءِ لتصلَ إلى السفينةِ في أقصرِ وقتٍ مُمكِنٍ؟ 58.4 km



8 **كرةُ قدمٍ:** يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ موقع لاعبَ كرةِ قدمٍ يركلُ الكرةَ نحوَ مرمًى عرضُهُ 5 m. أجِدُ قياسَ الزاويةِ التي يستطيعُ منْها اللاعبُ أنْ يركلَ الكرةَ لتسديدِ هدفٍ، علمًا بأنَّهُ يبعدُ عنْ طرفَيِ المرمى مسافةَ 26 m وَ 23 m.

9.38°



المفاهيم العابرة للمواد:

بعد الانتهاء من حل السؤال 7، أُعزِّز لدى الطلبة الوعي بالقضايا الوطنية (الوعي الوطني)، بتنظيم حوار معهم عن الملاحة البحرية والملاحة الجوية في المملكة، وسؤالهم عن عدد الموانئ والمطارات فيها، ثم أطلب إليهم كتابة مقالة عن ميناء العقبة ونشأته وأهميته، أو مطار الملكة علياء ونشأته وأهميته.

4 التدريب

أتدرَّب وأحلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1–7) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحُلُّ المسائل**)، فإنَّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (14 – 12).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية مـن الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (10 – 8) كتاب التمارين: (9 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (11 – 9) كتاب التمارين: (15 – 7)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (14 – 11) كتاب التمارين: (17 – 14)

5 الإثراء

نشاط التكنولوجيا:

- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية لقانون جيوب التمام، مثل استخدامه في فرز الأراضي.
- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن دلالة كلمة (BEDMAS) وعلاقتها بأولويات العمليات الحسابية.
- أُذكِّر الطلبة بضرورة توثيق مصدر معلوماتهم.

تعليمات المشروع:

- أُوجِّه الطلبة إلى متابعة تنفيذ الخطوة الثانية من المشروع.
- أطلب إلى الطلبة الذين طبَّقوا قانون جيوب التمام على المثلثات التأكُّد من نتائج حساباتهم جبريًّا، وباستعمال برمجية جيوجبرا.

6 الختام

نشاط: كيف أجد الحل؟

المواد والأدوات:

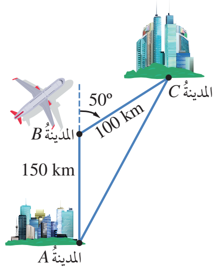
- صندوق يحوي مجموعة بطاقات رُسِم عليها مثلثات مختلفة (بعضها يُحَل باستعمال قانون الجيوب، أو قانون جيوب التمام، أو القانونين معًا).

خطوات العمل:

- أُقسِّم اللوح إلى ثلاثة أقسام، ثم أكتب فيها بالترتيب: قانون الجيوب، قانون جيوب التمام، القانونان معًا.
- أختار مجموعة من طلبة الصف.
- أطلب إلى كل فرد في المجموعة سحب بطاقة من الصندوق، وقراءة السؤال المُدوَّن عليها، وتحديد القانون المناسب لحل السؤال، ثم لصق البطاقة أسفل القسم الصحيح من اللوح.
- أطلب إلى بقية الطلبة تقييم إجابات زملائهم.
- أُكرِّر الخطوات السابقة باختيار مجموعة أخرى من الطلبة (بحسب عدد البطاقات في الصندوق).

---

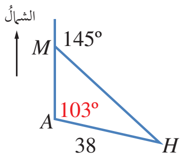
9 **خرائطُ طيرانٍ:** أقلعَتْ طائرةٌ منَ المدينةِ A في اتجاهِ 000° مسافةَ 150 km، ثمَّ اتَّجهَتْ إلى 050°، وسارَتْ مسافةَ 100 km حتّى وصلَتِ المدينةَ C كما في الشكلِ المجاورِ. ما أقصرُ مسافةٍ ممكنةٍ بينَ المدينتَيْنِ إذا كانَ مسموحًا للطائرةِ اتِّخاذُ المسارِ الذي تريدُ؟ 227.56 km



10 **ساعاتٌ:** طولُ عقربَيْ ساعةٍ 3 cm، وَ 4 cm. أَجِدُ المسافةَ بينَ رأسَيِ العقربيْنِ عندما يشيرانِ إلى الساعةِ 4 تمامًا.

الزاوية بين العقربين هي: 120=30+90 إذن، المسافة بين رأسي العقربين هي: 6 سم.

11 **مروحيةُ إنقاذٍ:** أُرسِلَتْ مروحيةُ إنقاذٍ منَ القاعدةِ A لإسعافِ رجلٍ على جبلٍ عندَ النقطةِ M إلى الشمالِ منْ هذهِ القاعدةِ، ثمَّ أوصلَتْهُ إلى المستشفى H الذي يبعدُ عنِ القاعدةِ مسافةَ 38 km كما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ. أَجِدُ المسافةَ منَ الجبلِ إلى المستشفى بطريقتَيْنِ. 64.55 km



مهارات التفكير العليا

12 **تحدٍّ:** أَجِدُ قياسَ أصغرِ زاويةٍ في مثلثٍ أطوالُ أضلاعِهِ $3a, 5a, 7a$ ، حيثُ a عددٌ حقيقيٌّ موجبٌ.

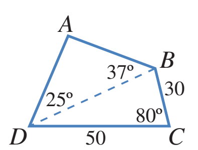
أنظر ملحق الإجابات.

13 **تحدٍّ:** يُمثِّلُ الشكلُ $ABCD$ المجاورُ حقلَ نخيلٍ تريدُ مالكتُهُ إحاطتهُ بسياجٍ. أَجِدُ طولَ السياجِ.

$AB = 25.68$

$AD = 36.57$

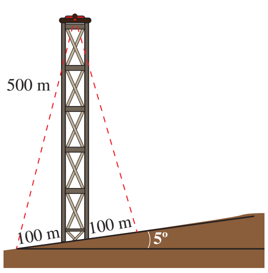
$\Rightarrow 25.68 + 36.57 + 30 + 50 = 142.25$



14 **تحدٍّ:** يرتفعُ برجٌ 500 m على تلَّةٍ تميلُ بزاويةِ 5° عنِ المستوى الأفقيِّ كما في الشكلِ المجاورِ. أرادَتِ المهندسةُ صفاءُ تثبيتَ البرجِ بسلكيْنِ منْ قمَّتِهِ إلى نقطتيْنِ على الأرضِ، تبعدُ كلٌّ منْهُما مسافةَ 100 m عنْ قاعدةِ البرجِ. أَجِدُ طولَ السلكيْنِ.

طول السلك الأوَّل هو: 518.38

طول السلك الثاني هو: 501.28



130

الدرس 4

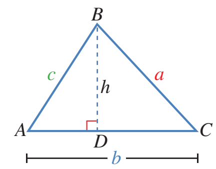
استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلث
Using Sine to Find the Area of a Triangle

فكرةُ الدرس إيجادُ مساحةِ مثلثٍ عُلِمَ فيهِ طولا ضلعيْنِ، وقياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما.

مسألةُ اليوم لدى مُزارعٍ قطعةُ أرضٍ مثلثةُ الشكلِ، طولُ أحدِ أضلاعِها 84 m، وطولُ ضلعٍ آخرَ 110 m، وقياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما 145°، وقدْ أرادَ زراعتَها بالبطاطا، فلَزِمَهُ 0.15 kg منْ درناتِ البطاطا لكلِّ مترٍ مربَّعٍ. كيفَ يستطيعُ المُزارعُ حسابَ كميةِ درناتِ البطاطا اللازمةِ لزراعةِ أرضِهِ؟

تعلَّمْتُ سابقًا كيفيةَ حسابِ مساحةِ المثلثِ بضربِ نصفِ طولِ قاعدتِهِ في ارتفاعِهِ، غيرَ أنَّهُ يتعذَّرُ استعمالُ هذهِ الطريقةِ إذا كانَ الارتفاعُ مجهولًا؛ لذا يُمكِنُ استخدامُ النسبِ المثلثيةِ في إيجادِ قانونٍ آخرَ لحسابِ مساحةِ المثلثِ باستعمالِ أطوالِ أضلاعِهِ وقياساتِ زواياهُ. ففي الشكلِ المجاورِ، نُلاحِظُ أنَّ BD هوَ ارتفاعُ المثلثِ ABC، وأنَّهُ عموديٌّ على القاعدةِ AC.

فإذا كانَ $AC = b$، وَ $BD = h$، فإنَّ مساحةَ هذا المثلثِ هيَ:



$$K = \frac{1}{2} AC \times BD$$
$$= \frac{1}{2} bh$$

نُلاحِظُ أيضًا منَ المثلثِ BDC ما يأتي:

تعريفُ جيبِ الزاوية $\sin C = \frac{h}{a}$

بضربِ طرفَيِ المعادلةِ في a $h = a \sin C$

بالتعويضِ عنْ h في قانونِ مساحةِ المثلثِ بـ $a \sin C$ $K = \frac{1}{2} b\,(a \sin C)$

$$= \frac{1}{2} ab \sin C$$

يُمكِنُ رسمُ العمودِ منَ الرأسِ A إلى الضلعِ الذي يقابلُهُ BC، ومنَ الرأسِ C إلى الضلعِ الذي يقابلُهُ AB، لبيانِ أنَّ مساحةَ هذا المثلثِ تساوي $\frac{1}{2} ac \sin B$، وأنَّها تساوي أيضًا $\frac{1}{2} bc \sin A$.

الدرس 4

نتاجات الدرس

- إيجاد مساحة مثلث عُلِم منهُ طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما، أو أطوال أضلاعه الثلاثة، أو طول ضلع وزاويتان، أو طولا ضلعين وزاوية تقابل أحدهما.
- حل مسائل رياضية وحياتية عن مساحة المثلث.

نتاجات التعلُّم القبلي:

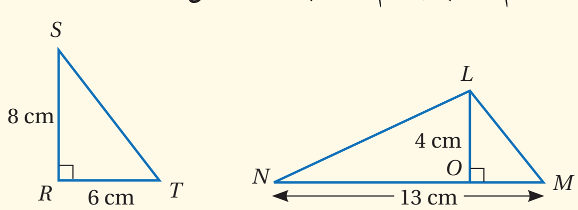
- حساب مساحة المثلث بدلالة طول قاعدته وارتفاعه.
- حل المثلث باستعمال قانوني الجيوب، وجيوب التمام.

مراجعة التعلُّم القبلي:

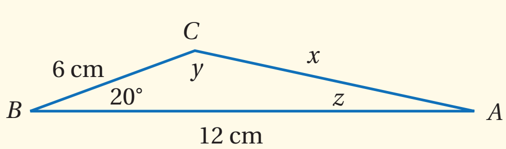
- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أعرض أمام الطلبة لوحة رُسِم عليها المثلثين الآتيين، ثم أطلب إليهم حساب مساحة كلٍّ منها:



- أطلب إلى الطلبة إيجاد الأطوال والزوايا المجهولة في المثلث الآتي.



$x = 6.68$ cm; $y = 142.1°$; $z = 17.9°$

2 الاستكشاف

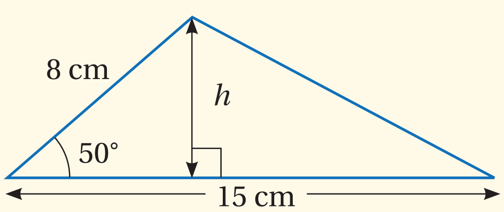
- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » مـاذا يفعل هذا المزارع ليتمكَّن من تحديد كمية درنات البطاطا التي تلزمه؟ إيجاد مساحة قطعة الأرض، ثم ضرب المساحة في الكمية اللازمة للمتر المربع الواحد.
  » ما الذي يجب معرفته لإيجاد مساحة مثلث؟ طول قاعدته، وارتفاعه.
  » ما ارتفاع المثلث؟ طول العمود المرسوم من أحد رؤوسه إلى الضلع المقابل أو امتداده.
  » مَنْ يرسم رسمًا توضيحيًّا يُمثِّل المسألة؟
  » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  » ما هذه الإجابة؟
  » كيف يمكن إيجاد الارتفاع في هذا السؤال بطريقة أخرى؟ باستعمال نسبة جيب الزاوية.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة بمثال كيفية التوصُّل إلى قانون لإيجاد مساحة المثلث باستعمال طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما، اعتمادًا على القانون الأساسي لمساحة المثلث الذي يعرفونه.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات.
- أرسم على اللوح المثلث المجاور، ثم أطلب إلى أفراد المجموعات إيجاد مساحته في ثلاث دقائق.



مساحة هذا المثلث: $\frac{1}{2} \times 15 \times h$

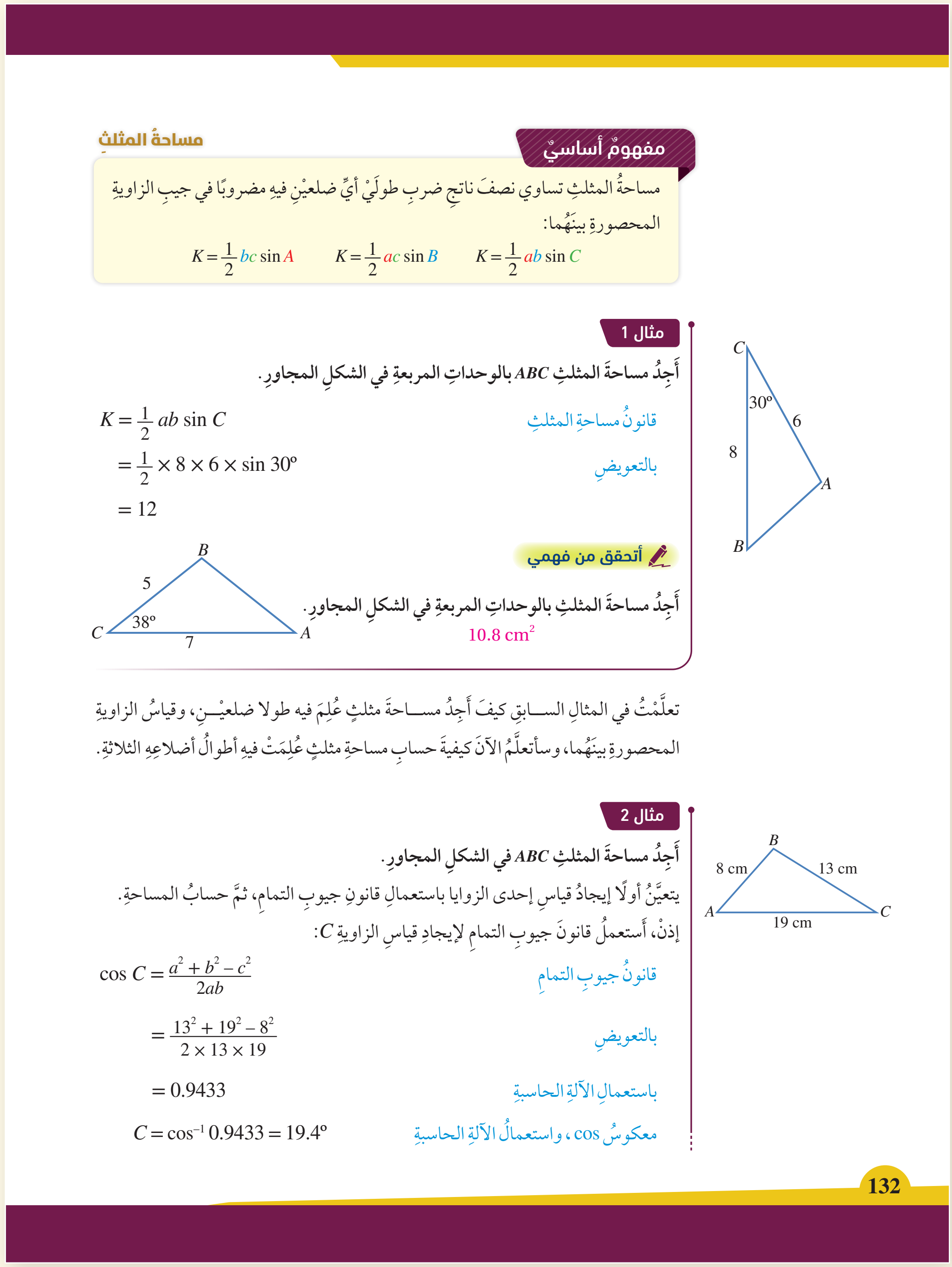
إيجاد قيمة h من العلاقة: $\sin 50° = \frac{h}{8}$

$h = 8 \times \sin 50°$

إذن، مساحة هذا المثلث هي: $\frac{1}{2} \times 15 \times 8 \times \sin 50° = 46.0 \text{ cm}^2$

- أُتابع الطلبة في هذه الأثناء، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة، ثم أُناقِشهم في الحل على اللوح.
- أكتب على اللوح برهان قانون مساحة المثلث باستعمال طولي ضلعين وجيب الزاوية المحصورة بينهما بصوره الثلاث.

ملاحظاتي



مفهومٌ أساسيٌّ — **مساحةُ المثلثِ**

مساحةُ المثلثِ تساوي نصفَ ناتجِ ضربِ طولَيْ أيِّ ضلعيْنِ فيهِ مضروبًا في جيبِ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما:

$$K=\frac{1}{2}bc\sin A \qquad K=\frac{1}{2}ac\sin B \qquad K=\frac{1}{2}ab\sin C$$

مثال 1

أَجِدُ مساحةَ المثلثِ ABC بالوحداتِ المربعةِ في الشكلِ المجاورِ.

قانونُ مساحةِ المثلثِ	$K=\frac{1}{2}ab\sin C$
بالتعويضِ	$=\frac{1}{2}\times 8\times 6\times \sin 30°$
	$=12$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مساحةَ المثلثِ بالوحداتِ المربعةِ في الشكلِ المجاورِ.

$10.8\ cm^2$

تعلَّمْتُ في المثالِ السابقِ كيفَ أَجِدُ مساحةَ مثلثٍ عُلِمَ فيه طولا ضلعيْنِ، وقياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما، وسأتعلَّمُ الآنَ كيفيةَ حسابِ مساحةِ مثلثٍ عُلِمَتْ فيهِ أطوالُ أضلاعِهِ الثلاثةِ.

مثال 2

أَجِدُ مساحةَ المثلثِ ABC في الشكلِ المجاورِ.

يتعيَّنُ أولًا إيجادُ قياسِ إحدى الزوايا باستعمالِ قانونِ جيوبِ التمامِ، ثمَّ حسابُ المساحةِ.

إذنْ، أَستعملُ قانونَ جيوبِ التمامِ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ C:

قانونُ جيوبِ التمامِ	$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
بالتعويضِ	$=\frac{13^2+19^2-8^2}{2\times 13\times 19}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$=0.9433$
معكوسُ cos، واستعمالُ الآلةِ الحاسبةِ	$C=\cos^{-1}0.9433=19.4°$

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد مســاحة مثلث، عُلِم منه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما بالتطبيق المباشر للقانون.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حــل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشــتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

مثال إضافي:

- أجد مســاحة المثلث ABC الذي فيه $AC = 3$ cm، و$AB = 7$ cm، وقياس الزاويــة $BAC = 112°$

$9.74\ cm^2$

إرشاد:

أُوضِّح للطلبة أنَّ حل بعض الأسئلة يتطلب استعمال قانون جيوب التمـام وقانون الجيوب؛ لإيجاد قياس زاويــة بين ضلعين معلومي الطــول، ثم تطبيق قانون إيجاد مساحة المثلث.

مثال 2

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد مساحة مثلث عُلِمت أطوال أضلاعه الثلاثة.

مثال 3: من الحياة

- أناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يُبيِّن كيفية حساب مساحة مثلث في موقف حياتي.

مثال إضافي:

- إذا كانت المسافة بين إربد وجرش 38 km، والمسافة بين إربد والرمثا 28 km، والمسافة بين الرمثا وجرش 40 km ، فما مســـاحة المثلث الذي تقع عند رؤوسه هذه المدن الثلاث؟ $508.3\ km^2$

إرشادات:

- أُنبِّه الطلبة إلـــى أنَّ تقريب الإجابة في الخطوات التي تســـبق الخطوة النهائية قـــد يجعل الإجابة النهائية غير دقيقة.
- أطلب إلى الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط تقريب إجاباتهم فـــي الخطوات قبل النهائية إلى العدد المناســـب من المنـــازل بحيث تحوي 4 أرقام.
- أُوضِّح للطلبة ذوي المســـتوى فوق المتوســـط كيف تُحفَظ الإجابة فـــي الخطوات قبل النهائية في ذاكرة الحاســـبة (مـــن دون تقريب)، وكيف تُستعاد وتُستعمَل في حسابات لاحقة.

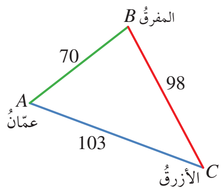
أُطبِّقُ قانونَ المساحةِ:

قانونُ مساحةِ المثلثِ	$K=\frac{1}{2}ab\sin C$
بالتعويضِ	$=\frac{1}{2}\times 13\times 19\times \sin 19.4^\circ$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$=41.0\ cm^2$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مساحةَ المثلثِ DEF، علمًا بأنَّ $DE = 10$ cm، وَ $DF = 12$ cm، وَ $EF = 9$ cm.
$44.04\ cm^2$

مثال 3: من الحياة



المسافةُ بينَ عمّانَ والأزرقِ 103 km، وبينَ عمّانَ والمفرقِ 70 km، وبينَ المفرقِ والأزرقِ 98 km. أَجِدُ مساحةَ المثلثِ الذي تقعُ عندَ رؤوسِهِ هذهِ المدنُ الثلاثُ.

الخطوةُ 1: إيجادُ قياسِ إحدى الزوايا، ولتكنْ B، باستعمالِ قانونِ جيوبِ التمامِ.

قانونُ جيوبِ التمامِ	$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$
بالتعويضِ	$=\frac{98^2+70^2-103^2}{2\times 98\times 70}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$=0.2839$
معكوسُ جيبِ التمامِ، واستعمالُ الآلةِ الحاسبةِ	$B=\cos^{-1}(0.2839)=73.5^\circ$

الخطوةُ 2: تطبيقُ قانونِ المساحةِ.

قانونُ مساحةِ المثلثِ	$K=\frac{1}{2}ac\sin B$
بالتعويضِ	$=\frac{1}{2}\times 98\times 70\times \sin 73.5^\circ$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$=3288.8\ km^2$

التخزينُ في ذاكرةِ الآلةِ الحاسبةِ

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ B في هذا السؤالِ، ثمَّ أضغطُ على الأزرارِ (بالترتيبِ منَ اليسارِ):
SHIFT → RCL → B
فتُحفَظُ الزاويةُ في الذاكرةِ. ولاستعمالِها في حسابِ مساحةِ المثلثِ، أُدخِلُ:
$\frac{1}{2}\times 98\times 70\times$
ثمَّ أضغطُ على الأزرارِ: sin → ALPHA → B → = ، فتظهرُ النتيجةُ: 3288.8

أتحقق من فهمي

قطعةُ رخامٍ مثلثةُ الشكلِ، أبعادُها: 50 cm، وَ 85 cm، وَ 70 cm. ما مساحتُها؟ $1749.5\ cm^2$

أخطاء شائعة:

قد يُخطِئ بعض الطلبة في اختيار الصيغة الصحيحة لحساب مساحة المثلث عندما يعطى منه طولا ضلعين وقياس زاويـــة مقابلة لأحدهما؛ لعلاج ذلك أُذكِّر الطلبة بضرورة إيجاد قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين لحســـاب مساحة هذا المثلث.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ مساحةَ كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

1 المثلثُ ABC الذي فيهِ $BC = 7$ cm ، $AC = 8$ cm وَ ، وقياسُ الزاويةِ ACB فيهِ 59° . $24.0\ cm^2$

2 المثلثُ ABC الذي قياسُ الزاويةِ BAC فيهِ 85° ، $AC = 6.7$ cm وَ ، $AB = 8$ cm . $26.7\ cm^2$

3 المثلثُ PQR الذي فيهِ $QR = 27$ cm ، $PR = 19$ cm وَ ، وقياسُ الزاويةِ QRP فيهِ 109° . $242.5\ cm^2$

4 المثلثُ XYZ الذي فيهِ $XY = 231$ cm ، $XZ = 191$ cm وَ ، وقياسُ الزاويةِ YXZ فيهِ 73° . $21096.6\ cm^2$

5 المثلثُ LMN الذي فيهِ $LN = 63$ cm ، $LM = 39$ cm وَ ، وقياسُ الزاويةِ NLM فيهِ 85° . $1223.8\ cm^2$

6 إذا كانَتْ مساحةُ المثلثِ ABC هيَ $27\ cm^2$ ، وَ $BC = 14$ cm ، وقياسُ الزاويةِ BCA فيهِ 115°، فما طولُ AC؟ 4.26 cm

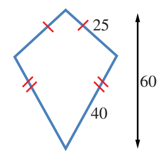
7 إذا كانَتْ مساحةُ المثلثِ LMN هيَ $133\ cm^2$ ، وَ $LM = 16$ cm ، وَ $MN = 21$ cm ، والزاويةُ LMN حادَّةً، فما قياسُ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ: LMN ، وَ MNL؟ $52.3^\circ,\ 48.5^\circ$

9 لوحةٌ على شكلِ مثلثٍ، أطوالُ أضلاعِهِ: 60 cm ، وَ 70 cm، وَ 80 cm. أَجِدُ مساحةَ اللوحةِ.

$2033\ cm^2$

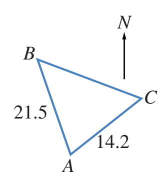
10 دائرتـانِ، مركزُ إحداهُما P ومركزُ الأُخرى Q ، وطولُ نصفِ قُطْـرِ إحداهُما 6 cm والأخرى 7 cm. إذا تقاطعَتا في النقطتيْنِ X وَ Y، وكانَ $PQ = 9$ cm، فما مساحةُ المثلثِ PXQ؟

$21.0\ cm^2$



11 **طائرةٌ ورقيةٌ:** صنعَ سـليمٌ طائرةً ورقيةً كما في الشـكلِ المجاورِ. أَجِدُ مسـاحةَ المادةِ اللازمةِ لصنعِ الطائرةِ بالوحداتِ المربعةِ.

726.2



12 **مُتنزَّهٌ وطنيٌّ:** يرادُ إنشـاءُ مُتنـزَّهٍ وطنيٍّ على قطعةِ أرضٍ مثلثةِ الشـكلِ ABC . إذا كانَتِ النقطـةُ B في اتجاهِ 324° منَ النقطةِ A ، والنقطةُ C فـي اتجاهِ 042° منَ النقطةِ A ، فما مساحةُ المُتنزَّهِ بالوحداتِ المربعةِ؟

149.3

134

إرشاد:

في السؤال 11، أُوجِّه الطلبة إلى رسم خط الشمال المار بالنقطة A، ثم إيجاد جزأي الزاويـة BAC وجمعهما؛ لإيجاد قياس الزاوية BAC، ثم اسـتعمال قانون إيجاد مساحة المثلث.

4 التدريب

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبـة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسـائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسـائل (1–9) ضمن مجموعات ثنائية داخـل الغرفة الصفية؛ فهذه المسـائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشـرًا بأمثلة الدرس، وهي تُسـتعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسـها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحـد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسـألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ اسـتراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تسـاؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (20 – 19).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية مـن الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أسـتعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (16 – 13) ,10 كتاب التمارين: (6 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 11, 12, 17, 18 كتاب التمارين: (10 – 4)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (20 – 17) كتاب التمارين: (12 – 8)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط رسم مثلث عُلِمت أطوال أضلاعه الثلاثة، ثم إيجاد مساحته.
- أُوجِّه الطلبة ذوي المستوى فوق المتوسط إلى البحث عن قطعة مثلثة الشكل من بيئتهم (لوحة، وجزء من حائط، وقطعة قماش مثلًا)، ثم إيجاد مساحتها التقريبية، ثم كتابة تقرير عن ذلك، وتضمينه صورًا للقطعة المثلثة الشكل، والخطوات المتبعة في حل السؤال.

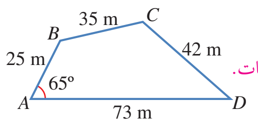
تعليمات المشروع:

- أُذكِّر الطلبة بأنَّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيَّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكُّد أنَّ عناصر المشروع جميعها موجودة يوم العرض.

6 الختام

- أطلب إلى الطلبة أنْ يرسموا في ورقةٍ مثلثًا عُلِمت ثلاثة من عناصره، من بينها طول أحد الأضلاع على الأقل، مراعين خصائص المثلثات التي تعلَّموها في صفوف سابقة (لضمان منطقية السؤال).
- أطلب إلى الطلبة تبادل الأوراق مع زملاءهم، ثم إيجاد مساحة هذا المثلث في 5 دقائق.
- أجمع أوراق الطلبة، ثم أُقدِّم التغذية الراجعة لهم.

حقولٌ: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ أبعادَ حقلٍ رباعيِّ الأضلاعِ:



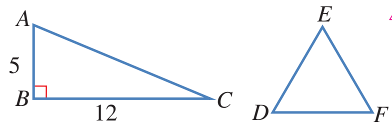
13 أُثبِتُ أنَّ طولَ BD هوَ 66 m ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ مترٍ. أنظر ملحق الإجابات.

14 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ C. 118.9°

15 أحسُبُ مساحةَ الحقلِ. $1470\ m^2$

16 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. 397.5 kg

17 المثلثُ ABC قائمُ الزاويةِ، والمثلثُ DEF مُتطابِقُ الأضلاعِ وللمثلثيْنِ المحيطُ نفسُهُ. أَجِدُ مساحةَ المثلثِ DEF.



$43.3\ cm^2$

18 **جغرافيا:** برمودا منطقةٌ مثلثةُ الشكلِ، تقعُ في الجزءِ الغربيِّ منَ المحيطِ الأطلسيِّ، رؤوسُها مدينةُ ميامي، وبرمودا، وسان خوان. وقدْ شهدَ مثلثُ برمودا وقوعَ عددٍ منْ حوادثِ اختفاءِ السفنِ والطائراتِ. إذا كانَتِ المسافةُ بينَ ميامي وسان خوان 1674 km تقريبًا، وبينَ ميامي وبرمودا نحوَ 1645 km، وبينَ سان خوان وبرمودا قرابةَ 1544 km، فما مساحةُ مثلثِ برمودا منْ دونِ اعتبارٍ لتقوُّسِ الأرضِ؟ $1133867\ km^2$

مهارات التفكير العليا

19 **تحدٍّ:** أَجِدُ مساحةَ المثلثِ ABC الذي قياسُ الزاويةِ A فيهِ 70°، وقياسُ الزاويةِ B فيهِ 60°، وطولُ الضلعِ AB فيهِ 4 cm. $8.5\ cm^2$

20 **أكتشفُ الخطأَ:** ABC مثلثٌ فيهِ $BC = 8cm$، $AB = 9cm$، وقياسُ الزاويةِ A فيهِ 30° . أرادَتْ نورُ إيجادَ مساحتِهِ إلى أقربِ عُشْرٍ، فكانَ حَلُّها كما يأتي: أنظر ملحق الإجابات.

$$K = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \sin 30^\circ$$

$$= 18\ cm^2$$

أكتشفُ الخطأَ في حَلِّ نورَ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

إرشاد:

في السؤال 18، أُوجِّه الطلبة إلى إيجاد طول ضلع آخر في المثلث باستعمال قانون الجيوب.

الدرس 5

نتاجات الدرس

- استعمال النسب المثلثية ونظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال مجهولة في مسائل ثلاثية الأبعاد.
- حساب الزاوية بين مستقيم ومستوى.
- حل مسائل حياتية ثلاثية الأبعاد.

نتاجات التعلُّم القبلي:

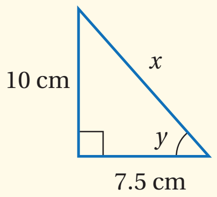
- حل المثلث قائم الزاوية.
- استعمال النسب المثلثية ونظرية فيثاغورس لحل مسائل ثنائية الأبعاد تتضمَّن حساب مسافات وزوايا مجهولة.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أُراجِع الطلبة في حل المثلث قائم الزاوية.
- أرسم المثلث قائم الزاوية الآتي، ثم أطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة كلٍّ من x، و y .



$x = 12.5$ cm; $y \approx 53.1°$

الدرس 5

حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ
Solving Problems in Three Dimensions

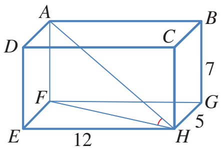
فكرةُ الدرسِ إيجادُ أطوالٍ وقياساتٍ لزوايا مجهولةٍ في أشكالٍ ثلاثيةِ الأبعادِ باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس والنسبِ المثلثيةِ.

مسألةُ اليومِ شُيِّدَ الهرمُ الأكبرُ في مدينةِ الجيزةِ بمصرَ عامَ 2500 قبلَ الميلادِ تقريبًا، وتُمثِّلُ قاعدتُهُ مربَّعًا طولُ ضلعِهِ 232.6 m، وطولُ الضلعِ الواصلِ بينَ قمَّةِ الهرمِ وأيٍّ منْ رؤوسِ المربَّعِ 221.2 m. أَجِدُ ارتفاعَ هذا الهرمِ.

تشتملُ المسائلُ ثلاثيةُ الأبعادِ (في الفضاءِ) على ثلاثةِ مستوياتٍ؛ أفقيٍّ، ورأسيٍّ، ومائلٍ. ويتطلَّبُ حَلُّ هذهِ المسائلِ رسمَ مُخطَّطٍ يُوضِّحُ المسألةَ، ويُمثِّلُ المعلوماتِ المعطاةَ فيها، ثمَّ البحثَ عنْ مثلثاتٍ قائمةِ الزاويةِ فيها. وإذا لمْ توجدْ هذهِ المثلثاتُ، فإنَّنا نرسمُ بعضَها، بحيثُ تكونُ بعضُ عناصرِها معلومةً، فضلًا عنْ تحديدِ العنصرِ المطلوبِ إيجادُهُ فيها؛ على أنْ نرسمَ كلًّا منْها بمنأى عنِ المُخطَّطِ المذكورِ آنفًا، ليسهلَ علينْا معرفةُ العلاقةِ التي نستخدمُها في الحَلِّ.

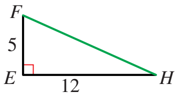
مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ متوازي مستطيلاتٍ. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ AHF، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.



المثلثُ AFH قائمُ الزاويةِ في F، ومعلومٌ فيهِ طولُ AF؛ لذا يجبُ معرفةُ عنصرٍ آخرَ لإيجادِ القياسِ المطلوبِ.

الخطوةُ 1: إيجادُ طولِ FH منَ المثلثِ قائمِ الزاويةِ FEH ؛ المرسومِ وحدَهُ جانبًا.



$(FH)^2 = (EF)^2 + (EH)^2$ نظريةُ فيثاغورس

$= 5^2 + 12^2$ بالتعويضِ

$(FH)^2 = 169$ بالتبسيطِ

$FH = \sqrt{169} = 13$ بحسابِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

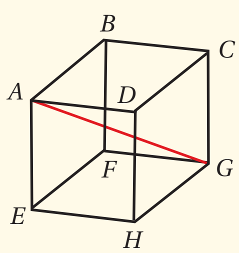
2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » ما الهرم؟ الهرم: مجسم قاعدته مضلع، وأوجهه الجانبية مثلثات متطابقة الضلعين، تتلاقى في نقطة واحدة، هي رأس الهرم.
  » ما ارتفاعه؟ ارتفاع الهرم: طول العمود النازل من رأس الهرم إلى قاعدته.
  » إذا كانت قاعدة الهرم مُربَّعًا أو مستطيلًا، ورُسِم عمود من رأس الهرم إلى القاعدة، فأين يلتقي هذا العمود بالقاعدة؟ يلتقيها في مركزها الذي يُمثِّل نقطة تقاطع قُطْريها، أو منتصف قُطْريها.
  » كيف يمكن إيجاد ارتفاع الهرم؟ بتطبيق نظرية فيثاغورس على مثلث قائم الزاوية، أحد أضلاعه ارتفاع الهرم.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

3 التدريس

- أُخبِر الطلبة أنَّ هذا الدرس يُوضِّح كيفية استعمال حساب المثلثات لإيجاد أطوال وزوايا مجهولة في مسائل حياتية ثلاثية الأبعاد.
- أُوضِّح للطلبة مفهوم قُطْر المكعب أو متوازي المستطيلات، ثم أطلب إليهم بيان كيفية إيجاد طوله.
- أسأل الطلبة: إذا كان $\overline{AG}$ قُطْر في متوازي المستطيلات المجاور، فأسمّي أقطاره الأخرى.
- أُوضِّح للطلبة مفهوم الزاوية بين مستقيم ومستوى.

  مثال: في الشكل المجاور، مسقط $\overline{AG}$ على قاعدة متوازي المستطيلات هو $\overline{EG}$، والزاوية بين $\overline{AG}$ والقاعدة $EFGH$ هي الزاوية AGE.



- أطلب إلى الطلبة إعطاء أمثلة أخرى على الزاوية بين مستقيم ومستوى بالاعتماد على الشكل المجاور.

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد زاوية في شكل ثلاثي الأبعاد، مُوضِّحًا كل خطوة من خطوات الحل.
- أُؤكِّد للطلبة أهمية رسم مُخطَّطات واضحة، مكتوب عليها القياسات المعلومة، ورموز القياسات المجهولة.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

توسعة: أُوجِّه مجموعة من الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن عجائب الدنيا السبع القديمة والحديثة، ثم أطلب إلى مجموعة أخرى البحث عن دول العالَم التي فيها أهرامات، ثم أطلب إلى كل مجموعة عرض نتائجها أمام الزملاء في الصف.

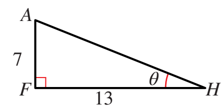
إرشادات:

- قُطْر المكعب أو متوازي المستطيلات هو القطعة المستقيمة التي تصل بين رأسين متقابلين من وجهين متقابلين في المجسم.
- الزاوية بين مستقيم ومستوى هي الزاوية المحصورة بين المستقيم ومسقطه العمودي على ذلك المستوى.

إرشادات:

- أُحضِر نماذج لمجسمات، مثل: المكعب، ومتوازي المستطيلات، والمنشور، والهرم، ونماذج مصنوعة من عيدان خشبية؛ ليتخيَّل الطلبة قُطْر المكعب ومتوازي المستطيلات، والزاوية بين مستقيم ومستوى.
- يُفضَّل توفير مجسم لمتوازي مستطيلات يرجع إليه الطلبة، ويمكن استعمال غرفة الصف بوصفها تُمثِّل متوازي مستطيلات.
- أطلب إلى الطلبة التأشير على المطلوب في المسألة، وأُحفِّزهم على رسم مثلث منفصل؛ لمساعدتهم على الحل في كل خطوة من خطوات حل المسألة.

الخطوةُ 2: رسمُ المثلثِ AFH وحدَهُ، ثمَّ استعمالُ الظلِّ (tan) لإيجادِ قياسِ الزاويةِ AHF.



$$\tan\theta = \frac{7}{13} = 0.5385$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.5385) = 28.3°$$ بالتقريبِ إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ

أتحقق من فهمي

أجِدُ BE، وقياسَ الزاويةِ EBG في المثالِ السابقِ. $EB = 14.8$ cm ; $m\angle EBG = 61.7°$

يُمكِنُ نمذجةُ كثيرٍ منَ المواقفِ الحياتيةِ باستعمالِ المثلثاتِ، ثمَّ إيجادُ قياساتٍ مجهولةٍ فيها باستعمالِ النسبِ المثلثيةِ.

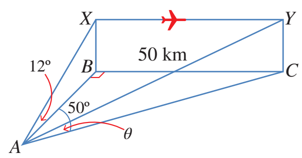
مثال 2: من الحياة

تقعُ النقاطُ A، وَ B، وَ C في مستوًى أفقيٍّ واحدٍ على الأرضِ، وتقعُ النقطةُ C على بُعدِ 50 km شرقيَّ النقطةِ B التي تقعُ شماليَّ النقطةِ A، وتقعُ النقطةُ C في اتجاهِ 050° منَ النقطةِ A. رُصِدَتْ منَ النقطةِ A حركةُ طائرةٍ في موقعيْنِ مختلفيْنِ على الارتفاعِ نفسِهِ عنِ الأرضِ؛ الأولِ: عندما كانَتْ فوقَ النقطةِ B مباشرةً، وكانَتْ زاويةُ ارتفاعِها 12°. والثاني: عندما كانَتْ فوقَ النقطةِ C. أجِدُ زاويةَ ارتفاعِ الطائرةِ عندما كانَتْ فوقَ النقطةِ C.

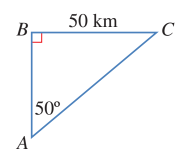
أتذكّر

تُسمّى الزاويةُ المحصورةُ بينَ خطِّ البصرِ والخطِّ الأفقيِّ المارِّ بعينِ الناظرِ زاويةَ الارتفاعِ.

الخطوةُ 1: أرسمُ مُخطَّطًا يُمثِّلُ المعلوماتِ المعطاةَ.



الخطوةُ 2: أرسمُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ABC، ثمَّ أستخدمُهُ في إيجادِ AB، وَ AC.



$$\tan 50° = \frac{50}{AB}$$ تعريفُ ظلِّ الزاويةِ

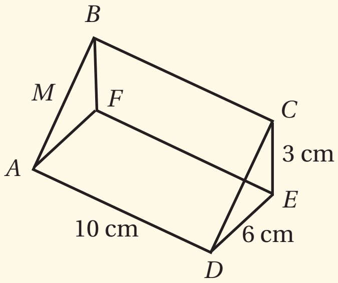
$$AB = \frac{50}{\tan 50°} = 41.95 \text{ km}$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$$\sin 50° = \frac{50}{AC}$$ تعريفُ جيبِ الزاويةِ

$$AC = \frac{50}{\sin 50°} = 65.27 \text{ km}$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

مثال إضافي:

- أجد قياس الزاوية CAE في الشكل الآتي. $14.4°$



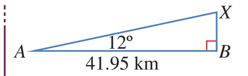
مثال 2: من الحياة

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 بطريقة مفصلة.

أخطاء شائعة:

قد يتعذَّر على بعض الطلبة تحديد المثلث قائم الزاوية الذي استعملوه لبدء الحل؛ لذا أُؤكِّد لهم ضرورة تحديد المثلث الذي يحوي العنصر المطلوب أوَّلًا، ثم الانتقال إلى المثلث المُرتبِط بهذا المثلث، الذي عُلِم منه طولا ضلعين، أو طول ضلع وقياس إحدى الزاويتين الحادتين؛ ما يساعدهم على إيجاد عناصر المثلث الذي يحوي العنصر المطلوب.

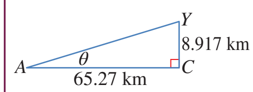
الخطوةُ 3: أرسمُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ABX، ثمَّ أستخدمُهُ في إيجادِ BX، ومنْهُ يُمكِنُ إيجادُ CY، فهما متساويانِ؛ لأنَّ الشكلَ $BXYC$ مستطيلٌ.



تعريفُ ظلِّ الزاويةِ $\tan 12° = \frac{BX}{41.95}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $BX = 41.95 \tan 12° = 8.917 \text{ km}$

الخطوةُ 4: أستعملُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ACY لإيجادِ زاويةِ الارتفاعِ θ.



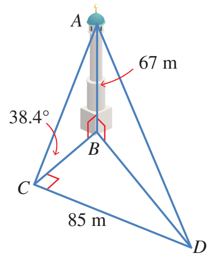
تعريفُ ظلِّ الزاويةِ $\tan \theta = \frac{8.917}{65.27} = 0.1366$

معكوسُ الظلِّ $\theta = \tan^{-1} 0.1366 = 7.8°$

إذنْ، زاويةُ ارتفاعِ الطائرةِ عندما كانَتْ فوقَ النقطةِ C هيَ: 7.8°، مُقرَّبةً إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

أتحقق من فهمي

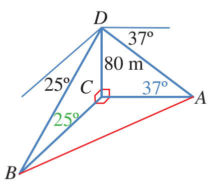
رصدَ أحمدُ قمَّةَ مئذنةٍ منْ نقطةٍ على الأرضِ تقعُ جنوبَ المئذنةِ، فكانَتْ زاويةُ ارتفاعِها 38.4°، ثمَّ سارَ شرقًا مسافةَ 85 m، ورصدَ قمَّةَ المئذنةِ مرَّةً أُخرى. إذا كانَ ارتفاعُ المئذنةِ 67 m، أجِدُ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ المئذنةِ في المرَّةِ الثانيةِ. أنظر ملحق الإجابات.



مثال 3: من الحياة

رُصِدَ المنزلُ A في اتجاهِ الشرقِ منْ قمَّةِ برجٍ يرتفعُ 80 m، وكذلكَ المنزلُ B في اتجاهِ الجنوبِ. إذا كانَتْ زاويةُ انخفاضِ المنزلِ A منْ قمَّةِ البرجِ 37°، وزاويةُ انخفاضِ المنزلِ B منْ قمَّتِهِ 25°، فما المسافةُ بينَ المنزليْنِ؟

الخطوةُ 1: أرسمُ مُخطَّطًا، علمًا بأنَّ البرجَ DC يَصنعُ زاويةً قائمةً معَ الأرضِ، وأنَّ اتجاهَ كلٍّ منَ الشرقِ والجنوبِ يَصنعانِ معًا زاويةً قائمةً.



138

مثال 3: من الحياة

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد طول مجهول في مسألة ثلاثية الأبعاد.

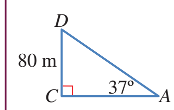
مثال إضافي:

- يقع برج الإرسال التلفزيوني XY على بُعْد 3 km إلى الشـرق من القرية A، وتقع القرية B على بُعْد 2 km جنوبي القرية A. إذا كان قياس زاوية ارتفاع قمة البرج من B هو 6°، فما ارتفاع البرج؟ 379 m

بما أنَّ زاويةَ انخفاضِ المنزلِ A هيَ $37°$، فإنَّ الزاويةَ DAC هيَ $37°$، وبما أنَّ زاويةَ انخفاضِ المنزلِ B هيَ $25°$، فإنَّ الزاويةَ DBC هيَ $25°$.

الخطوةُ 2: أستعملُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ABC لإيجادِ AB، وهذا يُحتِّمُ معرفةَ AC، وَ BC.

الخطوةُ 3: أرسمُ المثلثَ ADC . ولإيجادِ AC، أستعملُ ظلَّ الزاويةِ $37°$.

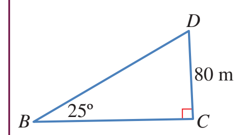


$$\tan 37° = \frac{80}{AC} \qquad \text{تعريفُ ظلِّ الزاويةِ}$$

$$AC = \frac{80}{\tan 37°} \qquad \text{بالتبسيطِ}$$

$$AC = 106.2 \text{ m} \qquad \text{باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ}$$

الخطوةُ 4: أرسمُ المثلثَ BCD. ولإيجادِ BC، أستعملُ ظلَّ الزاويةِ $25°$.

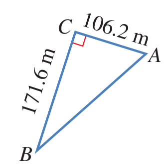


$$\tan 25° = \frac{80}{BC} \qquad \text{تعريفُ ظلِّ الزاويةِ}$$

$$BC = \frac{80}{\tan 25°} \qquad \text{بالتبسيطِ}$$

$$BC = 171.6 \text{ m} \qquad \text{باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ}$$

الخطوةُ 5: أستعملُ نظريةَ فيثاغورس في المثلثِ ACB لإيجادِ AB.



$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \qquad \text{نظريةُ فيثاغورس}$$

$$= (106.2)^2 + (171.6)^2 = 40725 \qquad \text{بالتعويضِ}$$

$$AB = \sqrt{40725} = 201.8 \qquad \text{بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ}$$

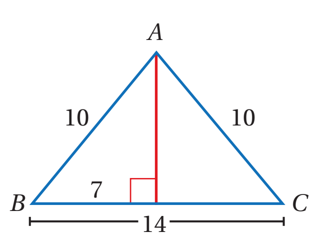
إذنْ، المسافةُ بينَ المنزليْنِ هيَ: 201.8 m، مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

أتحقق من فهمي

أبحرَتِ السفينتانِ A وَ B منَ الميناءِ P في اتجاهيْنِ مُتعامِديْنِ. وقدْ رصدَتْ طائرةٌ عموديةٌ تُحلِّقُ فوقَ الميناءِ هاتيْنِ السفينتيْنِ في اللحظةِ نفسِها، فكانَتْ زاويةُ انخفاضِ السفينةِ A هيَ $40°$، وزاويةُ انخفاضِ السفينةِ B هيَ $54°$. إذا كانَ ارتفاعُ الطائرةِ عنْ سطحِ البحرِ 600 m، فما المسافةُ بينَ السفينتيْنِ لحظةَ رصدِهِما؟ أنظر ملحق الإجابات.

إرشاد:

- لإيجاد قياس زاوية مجهولة في مُخطَّط معطى، يجب البحث عن مثلث قائم الزاوية، تكون الزاوية المطلوبة إحدى زاويتيه الحادتين. وإذا لم يكن المثلث موجودًا، فإنَّه يُرسَم بإنزال عمود من نقطة معلومة على أحد الضلعين إلى الضلع الآخر.
- تُستعمَل النسب المثلثية لحساب الزاوية. فمثلًا، لإيجاد قياس الزاوية B في المثلث ABC المتطابق الضلعين المُبيَّن جانبًا، يُرسَم عمود من الرأس A إلى الضلع $\overline{BC}$ ، فيُنصِّفه، فيكون قياس B هو: $\cos^{-1}\frac{7}{10} = 45.6°$.



4 التدريب

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1–6) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (17 – 16).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (7 – 13) كتاب التمارين: (1 – 4)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 11, 12, 17, 18 كتاب التمارين: (3 – 6)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (17 – 20) كتاب التمارين: (5 – 7)

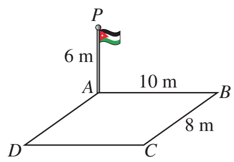
تنويع التعليم:

أطلب إلى الطلبــة كتابة فقرة عن المثال الذي وجدوه أكثر صعوبة، وتحدّى قدراتهم بدرجة كبيرة، وبيان سبب ذلك، ثم كتابة ما يجول في أذهانهم من أســئلة واستفسارات عن موضوع الدرس.

إرشاد:

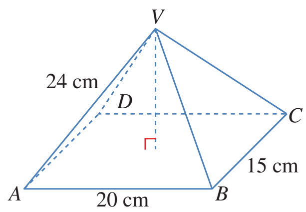
- لإيجــاد الزاوية بيــن $\overline{EM}$ والقاعدة $ABCD$ في السؤال 9، يُنزَّل عمود من النقطة E إلى القاعدة، فيلتقيها فــي النقطة G، فتكون الزاوية EMG هي الزاوية المطلوبة.
- أطلب إلى الطلبة كتابــة الخطوات التي يتبعونها في حل مســائل ثلاثية الأبعــاد، مُبيِّنيــن كيفية تطبيقها في حل السؤال 14

أتدرب وأحل المسائل



1 **ســاريةُ العَلَم:** نُصِبَتْ ســاريةُ عَلَمٍ عموديًّا عندَ رُكنِ ساحةٍ مستطيلةِ الشكلِ $ABCD$. أجِدْ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ الساريةِ P منَ النقطةِ C.

25.1°

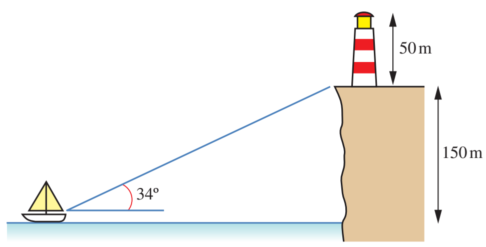


يُمثِّلُ الشــكلُ المجاورُ هرمًا قائمًا قاعدتُهُ $ABCD$ مســتطيلةُ الشكلِ، بُعْداهــا: 20 cm، وَ 15 cm. إذا كانَ طولُ كلٍّ منَ الأحرفِ الواصلةِ بينَ قمَّةِ الهــرمِ ورؤوسِ القاعدةِ 24 cm، وكانَتِ القمَّةُ V تقعُ رأســيًّا فوقَ مركزِ القاعدةِ المستطيلةِ، فأَجِدُ:

2 طولَ القُطْرِ AC. 25 cm

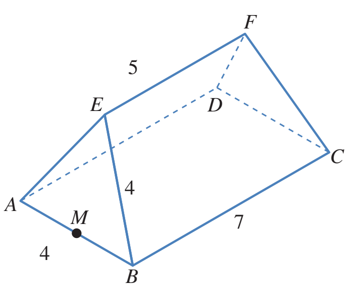
3 قياسَ الزاويةِ VAC. 58.6°

4 ارتفاعَ الهرمِ. 20.5 cm



5 **منارةٌ:** شاهدَ صيّادٌ منْ قاربِهِ قاعدةَ مَنارةٍ على حافةٍ صخريةٍ بزاويةِ ارتفاعٍ قياسُــها 34°. إذا كانَ ارتفاعُ قاعدةِ المَنارةِ عنْ مســتوى عينَيِ الصيّادِ 150 m، فكمْ يبعدُ الصيّادُ عنْ هذهِ القاعدةِ؟ 222.4 m

6 إذا كانَ ارتفاعُ المَنارةِ 50 m، فما زاويةُ ارتفاعِ نظرِ الصيّادِ نحوَ قمَّةِ المَنارةِ؟ 42.0°

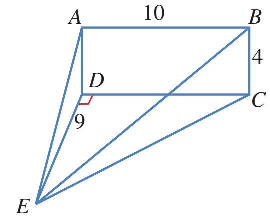


يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ سقفَ بنايةٍ، قاعدتُهُ المستطيلُ الأفقيُّ $ABCD$ الــذي بُعْــداه: 7 m، وَ 4 m. وتُمثِّلُ نهايتا الســقفِ مثلثيْنِ متطابقَيِ الأضلاعِ، في حينِ يُمثِّلُ كلٌّ منْ جانبَيِ الســقفِ شبهَ منحرفٍ متطابقَ الساقيْنِ. إذا كانَ طولُ الحافةِ العلويةِ EF هوَ 5 m، فأَجِدُ:

7 طولَ EM، حيثُ M نقطةُ منتصفِ AB. 3.46 m

8 قياسَ الزاويةِ EBC. أنظر ملحق الإجابات.

9 قياسَ الزاويةِ بينَ EM والقاعدةِ $ABCD$. أنظر ملحق الإجابات.



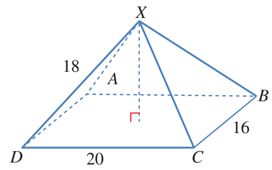
ABCD مستطيلٌ رأسـيٌّ، وَ **EDC** مثلثٌ أفقيٌّ. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ **CDE** هوَ $90°$، وَ $AB = 10$ cm، $BC = 4$ cm، وَ $ED = 9$ cm، فأَجِدْ:

10 قياسَ الزاويةِ AED. 24.0°

11 قياسَ الزاويةِ DEC. 48.0°

12 طولَ $\overline{EC}$. 13.5 cm

13 قياسَ الزاويةِ BEC. 16.6°



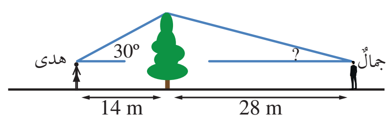
14 يُمثِّلُ الشـكلُ المجاورُ الهرمَ $XABCD$ الذي لهُ قاعدةٌ مستطيلةُ الشكلِ. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ الحافةِ XD وقُطْرِ القاعدةِ DB. 44.6°

15 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

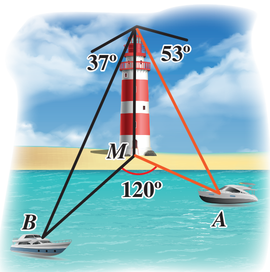
16 **أكتشفُ الخطأَ:** تقفُ هدى على بُعْدِ 14 m شرقيَّ شجرةٍ، زاويةُ ارتفاعِ قمَّتِها بالنسبةِ إليْهِ $30°$، ويقفُ جمالٌ على بُعْدِ 28 m غربيَّ الشـجرةِ، وهوَ يرى أنَّ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ الشـجرةِ بالنسبةِ إليْهِ يجبُ أنْ تكونَ $15°$؛ لأنَّهُ يبعدُ عنِ الشجرةِ مِثْلَي المسافةِ التي تبعدُها هدى. هلْ رأيُ جمالٍ صحيحٌ؟ إذا لمْ يكنْ رأيُهُ صحيحًا، فما زاويةُ الارتفاعِ؟

أنظر ملحق الإجابات.



17 **تحـدٍّ:** رُصِدَ القاربانِ A وَ B فـي البحرِ منْ قمَّةِ منارةٍ على الشـاطئِ، ارتفاعُها 44 m، في اللحظةِ نفسِـها، فكانَتْ زاويةُ انخفاضِ القاربِ A هيَ $53°$، وزاويةُ انخفـاضِ القاربِ B هيَ $37°$، وقياسُ الزاويةِ AMB هوَ $120°$، حيثُ M قاعدةُ المَنارةِ. أَجِدُ المسافةَ بينَ القاربيْنِ.

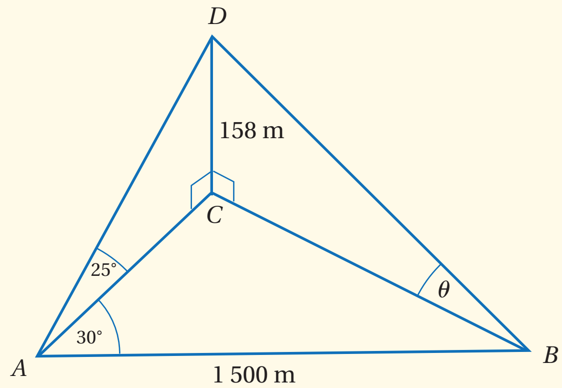
أنظر ملحق الإجابات.



5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:

» أسـتعمل القياسـات المُبيَّنة على الشكل الآتي لإيجاد كلٍّ ممّا يلي:



» AC. 338.8 m

» BC. 1218.4 m

» قيمة θ. 7.4°

» قياس الزاوية ADB. 130.8°

تعليمات المشروع:

- أُذكِّر الطلبة بأنَّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيَّن عليهم وضع اللمسـات النهائية على المشروع، والتأكُّد أنَّ عناصر المشـروع جميعهـا موجودة يوم العرض.

المفاهيم العابرة للمواد:

أُؤكِّد للطلبة أهميـة المفاهيم العابرة للمواد حيثمـا وردت في كتاب الطالب، أو كتـاب التمارين. ففي أثناء حل الأسـئلة، أُوجِّههم إلى اتبـاع الخطوات المنطقية المتسلسلة في الحل، وكتابة تبريراتهم لكل خطوة، وكيفية توصُّلهم إلى الإجابة؛ ما يُعزِّز لديهم المهارات الحياتية، ومهارات التفكير، مثل: التحليل والربط والتفسير، وتقديم الأدلة والبراهين.

6 الختام

أُوزِّع على الطلبـة أوراقًا ملونةً، ثم أطلب إلى كلٍّ منهم أنْ يكتب في الورقة ذات اللون الأخضر -مثلًا- أكثر سـؤال أتقـن حله في هذا الدرس، ثم يكتب في الورقة ذات اللون الأزرق -مثـلًا- موضوعًا يحتاج إلى مزيـد من التدرُّب عليه.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

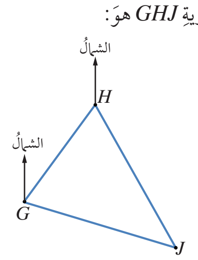
1) يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ إذا عُلِمَتْ جميعُ زواياهُ باستعمالِ:

a) قانونِ الجيوبِ فقطْ.
b) قانونِ جيوبِ التمامِ فقطْ.
c) قانونَيِ الجيوبِ وجيوبِ التمامِ معًا.
d) لا يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ في هذهِ الحالةِ.

2) يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ إذا عُلِمَتْ جميعُ أضلاعِهِ باستعمالِ:

a) قانونِ الجيوبِ فقطْ.
b) قانونِ جيوبِ التمامِ فقطْ.
c) قانونَيِ الجيوبِ وجيوبِ التمامِ معًا.
d) لا يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ في هذهِ الحالةِ.

3) إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ H منَ النقطةِ G في الشكلِ الآتي هوَ $045°$، واتجاهُ النقطةِ J منَ النقطةِ H هوَ $164°$، فإنَّ قياسَ الزاويةِ GHJ هوَ:



a) $16°$ b) $045°$
c) $29°$ d) $61°$

4) إحدى الصيغِ الآتيةِ تُستعمَلُ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ ABC:

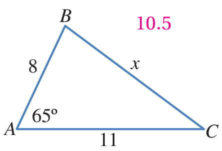
a) $\frac{1}{2}bc\sin C$ b) $\frac{1}{2}ab\sin C$
c) $\frac{1}{2}ab\sin A$ d) $\frac{1}{2}ab\sin B$

5) إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ R منَ النقطةِ Z هوَ $070°$، فإنَّ اتجاهَ النقطةِ Z منَ النقطةِ R هوَ:

a) $070°$ b) $110°$
c) $250°$ d) $290°$

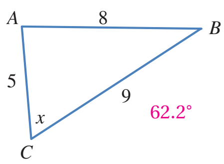
أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

6)



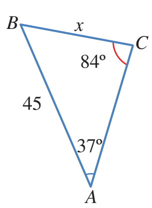
10.5

7)



62.2°

8)



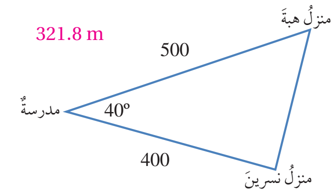
27.2

اختبار نهاية الوحدة

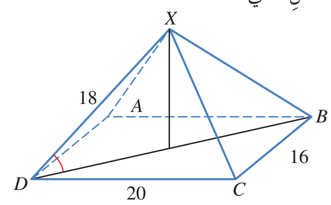
- أُراجِع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأسئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- أُعيِّن بعض الأسئلة ليحلها الطلبة واجبًا منزليًّا، ثم أُناقِشهم في إجاباتهم في اللقاء التالي.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أنَّ الأسئلة: 35 ،34 ،33 وردت ضمن أسئلة الاختبارات الدولية، أو وردت مسائل مشابهة لها.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

9 يبعدُ منزلُ نسرينَ عنِ المدرسةِ مسافةَ 400 m، ويبعدُ منزلُ هبةَ عنِ المدرسةِ نفسِها مسافةَ 500 m، كما في الشكلِ الآتي. أجدُ المسافةَ بينَ منزليْهِما. 321.8 m

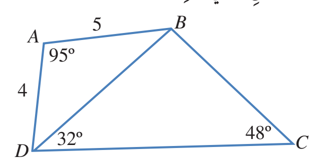


10 أجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ الحافةِ XD وقاعدةِ الهرمِ في الشكلِ الآتي. 44.6°



11 إذا كانَتْ مساحةُ المثلثِ PQR هيَ $68\ cm^2$، وكانَ $PQ = 18\ cm, RQ = 15\ cm$، فما قياسُ الزاويةِ الحادَّةِ PQR؟ 30.2°

مستعينًا بالشكلِ الآتي، أَجِدُ:



12 طولَ $\overline{DB}$. 6.67 cm

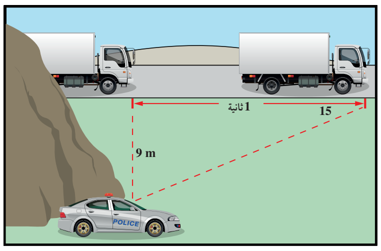
13 قياسَ الزاويةِ DBC. 100°

14 طولَ $\overline{CD}$. 8.84

15 مساحةَ الشكلِ الرباعيِّ $ABCD$. 25.6 cm²

16 **موانئُ:** أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ P باتجاهِ الغربِ مسافةَ 16 km، ثمَّ تحوَّلَتْ إلى اتجاهِ الجنوبِ، وقطعَتْ مسافةَ 9 km حتّى وصلَتِ الميناءَ S. أجِدُ اتجاهَ الميناءِ S منَ الميناءِ P. 240.6°

17 **رادارٌ:** رَصَدَ رادارٌ شاحنةً بعدَ ثانيةٍ منْ مرورِها بمحاذاتِهِ، فصنعَ الخطُّ الواصلُ بينَ الرادارِ والشاحنةِ وحافةِ الطريقِ زاويةً مقدارُها 15° كما في الشكلِ الآتي. أجِدُ سرعةَ الشاحنةِ بوحدةِ km/h. 120.9 km/h

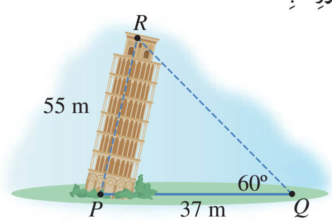


18 **عواصفُ بحريةٌ:** أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ A بسرعةِ 28 km/h مُتوجِّهةً إلى الميناءِ B على بُعْدِ 1100 km شرقَ الميناءِ A. ولتجنُّبِ العواصفِ الشديدةِ التي هبَّتْ عندَ انطلاقِ السفينةِ؛ فقدْ سلكَ القبطانُ مسارًا ينحرفُ 20° جنوبًا عنْ خطِّ الملاحةِ المباشرِ بينَ الميناءيْنِ حتّى هدأَتِ العواصفُ بعدَ إبحارٍ استمرَّ 10 ساعاتٍ. كمْ تبعدُ السفينةُ عنِ الميناءِ B بعدَ هذهِ المدَّةِ منَ الإبحارِ؟ ما قياسُ الزاويةِ الذي سيجعلُ السفينةَ تتوجَّهُ مباشرةً إلى الميناءِ B؟ 842.3 km ; 26.5°

تدريب على الاختبارات الدولية

- أعرّف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبيّن لهم أهميتها، ثم أوجّههم إلى حل الأسئلة في بند **(تدريب على الاختبارات الدولية)** فرديًّا، ثم أناقشهم في إجاباتها على اللوح.
- أحفّز الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة ومثيلاتها، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدّية، وأحرص على تضمين اختباراتي المدرسية نماذج مماثلة لهذه الأسئلة.

برجُ بيزا: طولُ برجِ بيزا المائلِ نحوَ 55 m، وزاويةُ ارتفاعِ أعلى البرجِ منْ نقطةٍ على بُعْدِ 37 m هيَ 60° كما في الشكلِ المجاورِ. أَجِدُ:

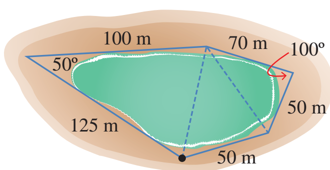


19 قياسَ الزاويةِ RPQ. 84.4°

20 ارتفاعَ قمَّةِ البرجِ R عنِ الأرضِ. 54.73 m

21 **ملاحةٌ بحريةٌ:** انطلقَ قاربٌ منَ النقطةِ A منَ الميناءِ نحوَ سفينةٍ مُتوقِّفةٍ في عُرْضِ البحرِ باتجاهِ 030°، وتبعدُ مسافةَ 2 km عنْ نقطةِ الانطلاقِ A، ثمَّ تحرَّكَ القاربُ إلى النقطةِ B التي تقعُ باتجاهِ 000° عنْ نقطةِ الانطلاقِ A، وكانتِ المسافةُ بينَهُما 3 km. أَجِدُ بُعْدَ السفينةِ عنِ النقطةِ B. 1.6 km

22 **زراعةٌ:** لتقديرِ مساحةِ حقلٍ منَ القمحِ، رسمَ خالدٌ مُضلَّعًا خماسيًّا حولَهُ، ثُمَّ حدَّدَ قياساتِهِ المُبيَّنةَ في الشكلِ الآتي. ما مساحةُ الحقلِ التقريبيةُ؟ $8800\ m^2$



23 **ملاحةٌ بحريةٌ:** تبعدُ سفينةٌ عنْ قاعدةِ منارةٍ واقعةٍ غربَها مسافةَ 80 km، وقدْ رصدَ قبطانُ السفينةِ قمَّةَ المَنارةِ بزاويةِ ارتفاعٍ مقدارُها 60°، ثمَّ سارَتِ السفينةُ بخطٍّ مستقيمٍ في اتجاهِ الشرقِ، فوجدَ أنَّ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ المَنارةِ هيَ 45°. أَجِدُ المسافةَ التي قطعَتْها السفينةُ. 58.6 km

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

ركبَ شخصٌ طائرةً عموديةً ترتفعُ 700 m عنْ سطحِ البحرِ، فشاهدَ السفينتيْنِ A وَ B عندَ مرورِ الطائرةِ فوقَ نقطةٍ بينهما. إذا كانَتْ زاويةُ انخفاضِ السفينةِ A هيَ 45°، وزاويةُ انخفاضِ السفينةِ B هيَ 40°، فأُجيبُ عنِ الأسئلةِ: 24، 25، 26.

24 اعتمادًا على زوايا الانخفاضِ، أختارُ العبارةَ الصحيحةَ:

a) موقعُ السفينةِ A بالنسبةِ إلى الطائرةِ أبعدُ منْهُ منَ السفينةِ B.

b) موقعُ السفينةِ B بالنسبةِ إلى الطائرةِ أبعدُ منْهُ منَ السفينةِ A.

c) بُعْدُ السفينتيْنِ عنِ الطائرةِ متساوٍ.

d) لا يُمكِنُ معرفةُ أيِّ السفينتيْنِ أبعدُ منْ زوايا الانخفاضِ.

25 المسافةُ بينَ السفينتيْنِ A وَ B مُقرَّبةً إلى أقربِ مترٍ هيَ:

a) 134 b) 700
c) 834 d) 1534

26 أُوضِّحُ كيفَ أجبْتُ عنِ السؤالِ 24.

أنظر ملحق الإجابات.

إرشاد:

في السؤال 22، أُوجِّه الطلبة إلى استعمال قانون جيوب التمام لحساب طول الضلع الثالث في كلٍّ من المثلثين: الأوَّل، والثالث، ثم استعماله لإيجاد قياس إحدى زوايا المثلث الأوسط.

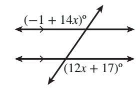
بعد ذلك أطلب إليهم إيجاد مساحة كلٍّ من المثلثات الثلاثة، وجمعها؛ لتقدير مساحة الحقل.

كتاب التمارين

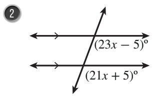
أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمثالِ المعطى.

- **الزوايا الناتجةُ عَنْ مستقيمينِ متوازيينِ وقاطعٍ** (الدرسُ 1)

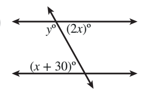
أجِدُ قيمةَ x و y في كلِّ شكلٍ ممّا يأتي:

1. 

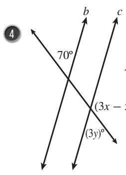
$x = 9$

2. 

$x = 5$

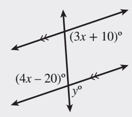
3. 

$y = 120°, x = 30°$

4. 

$y = \frac{70}{3}, x = \frac{115}{3}$

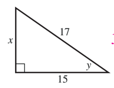
مثالٌ: أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ x وَ y في الشكلِ الآتي:



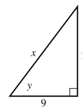
زاويتانِ متبادلتانِ داخليتانِ	$(4x - 20)° = (3x + 10)°$
أكتبُ المعادلةَ مِنْ دونِ رموزِ الزاويةِ	$4x - 20 = 3x + 10$
بإضافةِ $3x - 20$ إلى الطرفَينِ	$x = 30$
زاويتانِ متقابلتانِ بالرأسِ	$y° = (4x - 20)°$
أكتبُ المعادلةَ مِنْ دونِ رموزِ الزاويةِ	$y = 4x - 20$
بالتعويضِ	$= 4(30) - 20$
بالتبسيطِ	$= 120 - 20 = 100$

- **استعمالُ النسبِ المثلثيةِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المثلثِ** (الدرسُ 2)

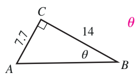
أَجِدُ قياساتِ الزوايا وأطوالَ الأضلاعِ المجهولةِ في كلٍّ ممّا يأتي:

5. 

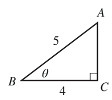
$y = 28.1°, x = 8$

6. 

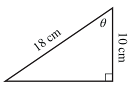
$y = 65.8°, x = \sqrt{481}$

7. 

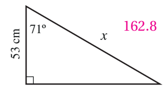
$\theta = 28.8°$

8. 

$\theta = 36.9°$

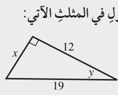
9. 

$\theta = 56.3°$

10. 

162.8

مثالٌ: أَجِدُ قياساتِ الزوايا وطولَ الضلعِ المجهولِ في المثلثِ الآتي:



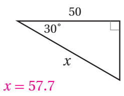
نظريةُ فيثاغورس	$x^2 = 19^2 - 12^2$
بالتبسيطِ	$= 361 - 144 = 217$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَينِ	$x = \sqrt{217} \approx 14.7$
تعريفُ جيبِ التمامِ	$\cos y = \frac{12}{19}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$y = \cos^{-1}\left(\frac{12}{19}\right) \approx 51°$

قياسُ الزاويةِ الثالثةِ في هذا المثلثِ:

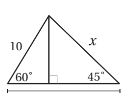
$$180° - 90° - 51° = 39°$$

- **استعمالُ النسبةِ المثلثيةِ في إيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المثلثاتِ الخاصةِ** (الدرسُ 2)

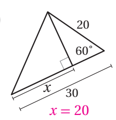
أستعملُ النسبَ المُثلَّثيةَ لإيجادِ قيمةِ x في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي:

11. 

$x = 57.7$

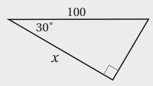
12. 

$x = 12.25$

13. 

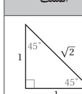
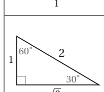
$x = 20$

مثالٌ: أجدُ قيمةَ x في المُثلَّثِ المُجاوِرِ.



نسبةُ جيبِ التمامِ	$\cos A = \frac{(\text{المُجاوِر})}{(\text{الوترِ})}$
بالتعويضِ	$\cos 30° = \frac{x}{100}$
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{100}$
بضربِ طرفَيِ المعادلةِ في 100	$\frac{100\sqrt{3}}{2} = x$
بالتبسيطِ	$x = 50\sqrt{3}$

أتذكَّرُ

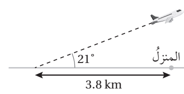
المُثلَّثُ	الجيبُ	جيبُ التمامِ	الظلُّ
	$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan 45° = 1$
	$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\tan 60° = \sqrt{3}$

كتاب التمارين

الوحدةُ 4: تطبيقاتُ المثلثاتِ

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

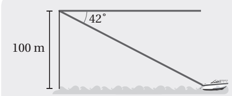
زوايا الارتفاعِ والانخفاضِ (الدرسُ 2)



14 **طائرةٌ:** رصدَتْ ليلى طائرةً في السماءِ بزاويةِ ارتفاعٍ مقدارُها 21° لحظةَ مرورِها فوقَ سطحِ أحدِ المنازلِ. إذا كانَ بُعْدُ ليلى عنِ المنزلِ هوَ 3.8 km، فأجدُ ارتفاعَ الطائرةِ عنِ المنزلِ. 1.5

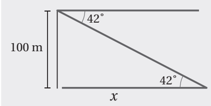
15 وقفَ عصفورٌ على شجرةٍ ارتفاعُها 12 m، مُراقِبًا دودةً على سطحِ الأرضِ بزاويةِ انخفاضٍ مقدارُها 34°. أجدُ المسافةَ بينَ الدودةِ والعصفورِ. 14.5

مثالٌ: قارِبٌ: ينظرُ عليٌّ منْ أعلى جُرْفٍ إلى قارِبٍ في البحرِ بزاويةِ انخفاضٍ مقدارُها 42°. إذا كانَ ارتفاعُ الجُرْفِ عنْ سطحِ البحرِ هوَ 100 m، فأجدُ بُعْدَ القارِبِ عنْ قاعدةِ الجُرْفِ.



بما أنَّ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ والخطِّ الأفقيِّ (زاويةُ الانخفاضِ) هوَ 42°، فإنَّ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ وسطحِ البحرِ هوَ 42°؛ لأنَّهُما زاويتانِ مُتبادِلتانِ داخليًّا.

أفترضُ أنَّ بُعْدَ القارِبِ عنْ قاعدةِ الجُرْفِ هوَ x:



$\tan A = \frac{\text{(المُقابِل)}}{\text{(المجاورِ)}}$ نسبةُ الظلِّ

$\tan 42° = \frac{100}{x}$ بالتعويضِ

$x \tan 42° = 100$ بضربِ طرفَيِ المعادلةِ في x

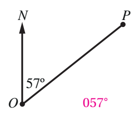
$x = \frac{100}{\tan 42°}$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على $\tan 42°$

$x \approx 111$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

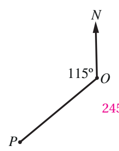
إذنْ، بُعْدُ القارِبِ عنْ قاعدةِ الجُرْفِ هوَ 111 m تقريبًا.

الدرسُ 1
الاتجاهُ منَ الشمالِ
Bearing

أُحدِّدُ اتجاهَ النقطةِ P منَ النقطةِ O في كلٍّ ممّا يأتي:

1


057°

2


245°

3 إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ A منَ النقطةِ B هوَ 154º، فما اتجاهُ النقطةِ B منَ النقطةِ A؟ 334°

4 إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ P منَ النقطةِ Q هوَ 235º، فما اتجاهُ النقطةِ Q منَ النقطةِ P؟ 055°

5 أرسمُ شكلًا يُبيِّنُ مواقعَ النقاطِ: A، وَB، وَ C إذا كانَتْ B شرقَ A، وكانَتْ C على اتجاهِ 110º منْ A، وعلى اتجاهِ 230º منْ B. انظر ملحق الإجابات

6 أرسمُ شكلًا يُبيِّنُ مواقعَ النقاطِ: A، وَB، وَ C إذا كانَتْ B شرقَ A، وكانَتْ C على اتجاهِ 105º منْ A، وعلى اتجاهِ 135º منْ B. انظر ملحق الإجابات

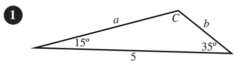
7 أقلعَتْ طائرةٌ منَ المطارِ في اتجاهِ 050º، وبعدَ أنْ قطعَتْ مسافةَ 16 km دارَتْ بزاويةِ 90º يسارًا، وقطعَتْ مسافةَ 37 km. ما اتجاهُ الطائرةِ الآنَ منَ المطارِ؟
انظر ملحق الإجابات

8 أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ P في اتجاهِ 120º، وبعدَ أنْ قطعَتْ مسافةَ 40 km دارَتْ بزاويةِ 90º يسارًا، وقطعَتْ مسافةَ 100 km. ما اتجاهُ السفينةِ الآنَ منَ الميناءِ P؟
انظر ملحق الإجابات

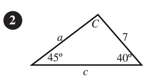
9 ABC مثلثٌ مُتطابِقُ الأضلاعِ. إذا كانَ اتجاهُ B منْ A هوَ 050º، فما اتجاهُ C منْ B؟
اتجاه C من B هو: 170°

الدرسُ 2
قانونُ الجيوبِ
Law of Sines

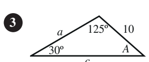
أَجِدُ القياسَ المجهولَ في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

1


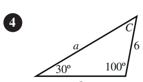
$C = 130°; a \approx 3.7; b \approx 1.7$

2


$C = 95°; a \approx 6.4; c \approx 9.9$

3


$A = 25°; a \approx 8.5; c \approx 16.4$

4


$C = 50°; a \approx 11.8; c \approx 9.2$

أَجِدُ القياسَ المجهولَ في المثلثِ ABC في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

5 $a = 3, b = 2, A = 50º$
$B \approx 30.7°; C \approx 99.3; c \approx 3.9$

6 $A = 40º, B = 20º, a = 2$
$C = 120°; c \approx 2.7; b \approx 1.1$

7 $a = 2, c = 1, A = 120º$
$C \approx 25.7°; B \approx 34.3; b \approx 1.3$

8 $A = 70º, B = 60º, c = 4$
$C = 50°; a \approx 4.9; b \approx 4.5$

9 $b = 4, c = 6, B = 20º$
$C \approx 30.9°; A \approx 129.1°; a \approx 9.1$

10 $A = 40º, B = 40º, c = 2$
$C = 100°; a = b \approx 1.3$

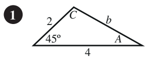
11 **طائراتٌ:** رصدَتْ كلٌّ منْ زينةَ وهناءَ طائرةً ورقيةً عندَ مرورِها فوقَ الخطِّ الواصلِ بينَهُما، فكانَتْ زاويةُ ارتفاعِها منْ موقعِ زينةَ 35º، ومنْ موقعِ هناءَ 40º. إذا كانَتِ المسافةُ بينَ زينةَ وهناءَ 900 m، فما ارتفاعُ الطائرةِ؟
أنظر ملحق الإجابات.

12 **قواربُ:** رصدَ طيّارٌ القاربيْنِ A، وَ B في البحرِ عندَما مرَّتْ طائرتُهُ فوقَ الخطِّ الواصلِ بينَهُما، فكانَتْ زاويةُ انخفاضِ القاربِ الأولِ 44º، وزاويةُ انخفاضِ القاربِ الثاني 37º. إذا كانَتِ المسافةُ بينَ القاربيْنِ 7 km، فما ارتفاعُ الطائرةِ عنْ سطحِ البحرِ؟ أنظر ملحق الإجابات.

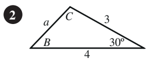
كتاب التمارين

الدرسُ 3
قانونُ جيوبِ التمامِ
Law of Cosines

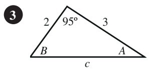
أَجِدُ القياسَ المجهولَ في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

1 

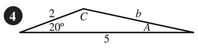
$b \approx 2.9; A \approx 29.2°; \; C \approx 105.8°$

2 

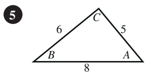
$a \approx 2.1; B \approx 45.6°; C \approx 104.4°$

3 

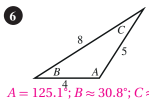
$c \approx 3.7; B \approx 53.9°; A \approx 31.1°$

4 

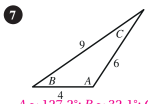
$b \approx 3.2; A \approx 12.3°; \; C \approx 147.7°$

5 

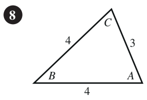
$C \approx 92.9°; A \approx 48.5°; B \approx 38.6$

6 

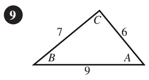
$A = 125.1°; B \approx 30.8°; C \approx 24.1°$

7 

$A \approx 127.2°; B \approx 32.1°; C \approx 20.7°$

8 

$B \approx 44°; A = C \approx 68°$

9 

$B \approx 41.8°; A \approx 51°; C \approx 87.2°$

أَجِدُ القياساتِ المجهولَةِ في المثلثِ ABC في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

10 $a = 3, b = 4, C = 40°$
$c \approx 2.6; A \approx 47.9°; \; B \approx 92.1°$

11 $a = 2, c = 1, B = 10°$
$b \approx 1.03; C \approx 9.7°; \; A \approx 160.3°$

12 $b = 1, c = 3, A = 80°$
$a \approx 2.99; C \approx 81.2°, B = 18.8°$

13 $a = 4, b = 5, c = 3$
$B = 90°; A \approx 53.1°; C \approx 36.9°$

14 $a = 5, b = 8, c = 9$
$C \approx 84.3°; B \approx 62.1°; A \approx 33.6°$

15 $a = 9, b = 7, c = 10$
$C \approx 76.2°; A \approx 60.9°; B \approx 42.9°$

16 **قواربُ:** انطلقَ قاربانِ منَ الرصيفِ نفسِهِ في وقتٍ واحدٍ. وقدْ أخذَ القاربُ الأوّلُ اتجاهَ 060°، وسارَ بسرعةِ 7 km/h، وأخذَ الثاني اتجاهَ 123°، وسارَ بسرعةِ 29 km/h. ما المسافةُ بينَ القاربيْنِ بعدَ ساعتيْنِ منَ انطلاقِهِما؟ أنظر ملحق الإجابات.

17 **سفنٌ:** أبحرَتِ السفينتانِ X، وَ Y منَ الميناءِ نفسِهِ عندَ الساعةِ التاسعةِ صباحًا. وقدْ أخذَتِ السفينةُ X اتجاهَ 075°، وسارَتْ بسرعةٍ متوسطةٍ مقدارُها 20 km/h ، وأخذَتِ السفينةُ Y اتجاهَ 130°، وسارَتْ بسرعةٍ متوسطةٍ مقدارُها 25 km/h. ما المسافةُ بينَ السفينتيْنِ عندَ الساعةِ الحاديةَ عشرةَ صباحًا؟ أنظر ملحق الإجابات.

الدرسُ 4
استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ
Using Sine to Find the Area of a Triangle

أَجِدُ مساحةَ المثلثِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

1 المثلثُ ABC فيهِ $AB = 8$ cm، $AC = 11$ cm، وَ $m\angle CAB = 67°$. 40.5 cm^2

2 المثلثُ PQR فيهِ $PQ = 30$ cm، $PR = 22$ cm، وَ $m\angle QPR = 120°$. 285.8 cm^2

3 المثلثُ XYZ فيهِ $XY = 12$ cm، $XZ = 15$ cm، وَ $YZ = 10$ cm. $m\angle XYZ \approx 85.5°; K \approx 59.8 \text{ cm}^2$

4 المثلثُ LMN فيهِ $LM = 25$ cm، $LN = 14$ cm، وَ $MN = 18$ cm. $m\angle MNL \approx 102.2°; K \approx 123.2 \text{ cm}^2$

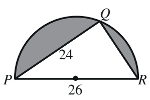
5 مساحةُ المثلثِ ABC هيَ 84 cm^2. إذا كانَ $BC = 15$ cm، وَ $m\angle BCA = 120°$، فما طولُ $\overline{AC}$؟ $AC \approx 12.9$ cm

6 مساحةُ المثلثِ DEF هيَ 100 cm^2. إذا كانَ $DE = 14$ cm، وَ $m\angle DEF = 64°$، فما طولُ $\overline{EF}$؟ $EF \approx 15.9$ cm

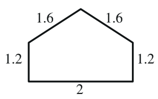
7 أَجِدُ مساحةَ المثلثِ PQR إذا كانَ $m\angle QRP = 75°$، $m\angle PQR = 60°$، وَ $PQ = 12$ cm. $QR \approx 8.8 \text{ cm}; K \approx 45.7 \text{ cm}^2$

8 أَجِدُ مساحةَ المثلثِ EFG إذا كانَ $m\angle GEF = 63°$، $m\angle EFG = 45°$، وَ $EF = 46$ cm.
$GE \approx 34.2 \text{ cm}; K \approx 700.9 \text{ cm}^2$

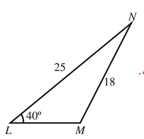
9 أَجِدُ مساحةَ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الشكلِ المجاورِ بالوحداتِ المربَّعةِ، علمًا بأنَّ الشكلَ نصفُ دائرةٍ.
أنظر ملحق الإجابات.



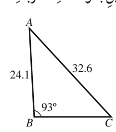
10 أَجِدُ مساحةَ النافذةِ ذاتِ الأبعادِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ بالوحداتِ المربَّعةِ.
أنظر ملحق الإجابات.



أَجِدُ مساحةَ كلٍّ منَ المثلثيْنِ الآتييْنِ بالوحداتِ المربَّعةِ:

11 

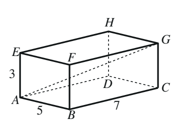
أنظر ملحق الإجابات.

12 

أنظر ملحق الإجابات.

الدرسُ 5
حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ
Solving Problems in Three Dimensions

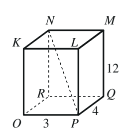
أتأمَّلُ الشكلَ المجاورَ، ثمَّ أَحُلُّ المسألتيْنِ الآتيتيْنِ: 1–2 أنظر ملحق الإجابات.



1 أَجِدُ طولَ القُطْرِ $\overline{AG}$ في متوازي المستطيلاتِ المجاورِ.

2 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ GAC.

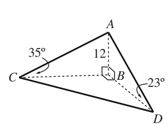
أتأمَّلُ الشكلَ المجاورَ، ثمَّ أَحُلُّ المسألتيْنِ الآتيتيْنِ: 3–4 أنظر ملحق الإجابات.



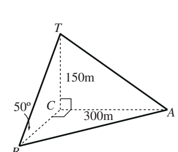
3 أَجِدُ طولَ القُطْرِ $\overline{NP}$ في متوازي المستطيلاتِ المجاورِ.

4 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ NPR.

5 **قياساتٌ:** رُصِدَ رجلانِ على الأرضِ منْ قمَّةِ برجٍ رأسيٍّ ارتفاعُهُ 25 m، فكانَتْ زاويةُ انخفاضِ الرجلِ الأولِ الذي يقفُ غربَ البرجِ هيَ 31°، وزاويةُ انخفاضِ الرجلِ الثاني الذي يقفُ جنوبَ البرجِ هيَ 17°. ما المسافةُ بينَ الرجلينِ؟
أنظر ملحق الإجابات.



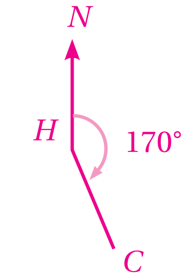
6 **ساريةٌ:** يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ ساريةً رأسيةً $\overline{AB}$ ارتفاعُها 12m، والنقاطَ: B، C، وَ D الواقعةَ في مستوًى أفقيٍّ واحدٍ، بحيثُ كانَتْ C غربَ B، وَ D جنوبَ B، وكانَتْ زاويةُ ارتفاعِ قمَّةِ الساريةِ منَ النقطةِ D هيَ 23°، ومنَ النقطةِ C هيَ 35°. ما طولُ $\overline{CD}$؟ ما اتجاهُ النقطةِ D منَ النقطةِ C؟
أنظر ملحق الإجابات.



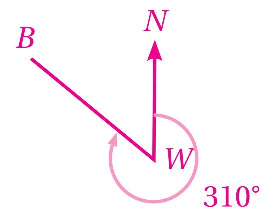
7 **أبراجٌ:** تُمثِّلُ $\overline{TC}$ برجَ إرسالٍ رأسيٍّ ارتفاعُهُ 150 m، وهوَ مُدعَّمٌ برباطيْنِ معدنييْنِ، هما: $\overline{TA}$، وَ $\overline{TB}$، وكانَ أحدُهُما مُثبَّتًا عندَ النقطةِ A الواقعةِ على الأرضِ شرقَ قاعدةِ البرجِ، وتبعدُ عنْها مسافةَ 300 m، وكانَ الآخرُ مُثبَّتًا عندَ النقطةِ B جنوبَ قاعدةِ البرجِ، وزاويةُ ميلِهِ عنِ الأرضِ 50°. ما المسافةُ بينَ النقطتيْنِ A، وَ B؟ ما اتجاهُ النقطةِ A منَ النقطةِ B؟ أنظر ملحق الإجابات.

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 1:

4)



5)

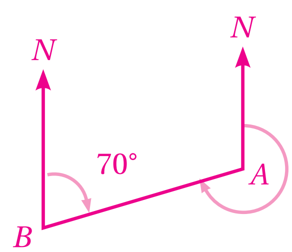


6) قياس الزاوية NAB الداخلية هو:

$180° - 70° = 110°$

إذن، اتجاه النقطة B من النقطة A هو:

$360° - 110° = 250°$

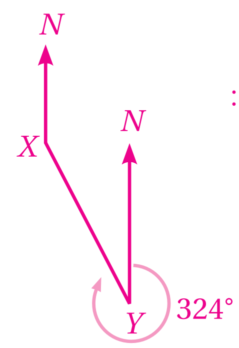


7) قياس الزاوية NYX الداخلية هو:

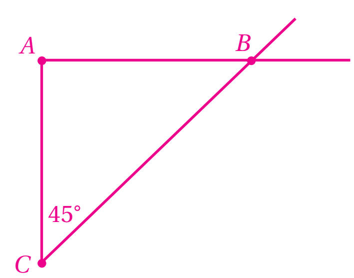
$360° - 324° = 36°$

إذن، اتجاه النقطة Y من النقطة X هو:

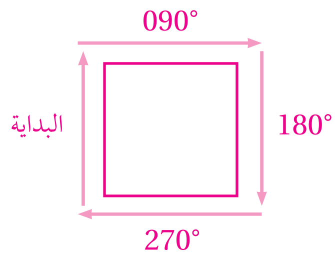
$180° - 36° = 144°$



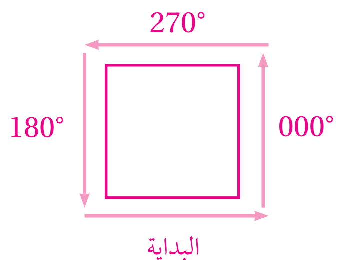
8) أُعيِّن النقطة C أوَّلًا، ثم أُعيِّن النقطة A شمال (فوق) النقطة C، ثم أرسم الاتجاه 045° من النقطة C، وخطًّا يُمثِّل اتجاه الشرق من النقطة A، فيكون تقاطع الاتجاهين هو موقع النقطة B.



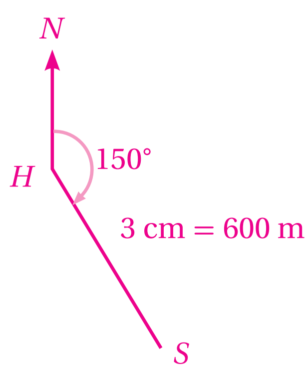
9) إذا كانت البداية في اتجاه الشمال، فإنَّه سيتحوَّل إلى اتجاه الشرق عند نهاية ضلع المربع، ثم الجنوب، فالغرب؛ أيْ إنَّ الاتجاهات التي سلكها هي: 090°، و 180°، و 270° بالترتيب.



10) إذا كانت البداية في اتجاه 090°، فإنَّه سيتحوَّل إلى اتجاه الشمال عند نهاية ضلع المربع، ثم الغرب، فالجنوب؛ أيْ إنَّ الاتجاهات التي سلكها هي: 000°، و 270°، و 180° بالترتيب.



16)



18) قياس الزاوية NAB هو 30°، وقياس الزاوية BAC هو 45°؛ لأنَّ قُطْر المربع يُنصِّف زواياه.

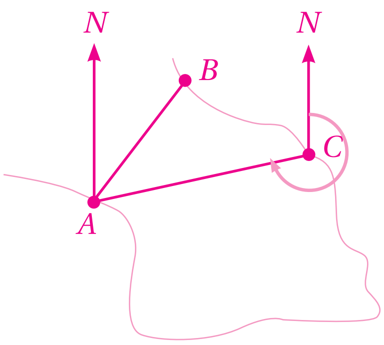
إذن:

قياس الزاوية NAC هو: $30° + 45° = 75°$

قياس الزاوية NCA الداخلية هو: $180° - 75° = 105°$؛ لأنَّ الزاويتين الداخليتين المتحالفتين بين متوازيين متكاملتان.

اتجاه A من C يساوي قياس الزاوية NCA المنعكسة، وهو:

$360° - 105° = 255°$



20) أنظر رسوم الطلبة.

في ما يأتي مثال على الإجابة:

قياس الزاوية NBA هو: $90° - 43° = 47°$

إذن، اتجاه A من B هو: $047°$

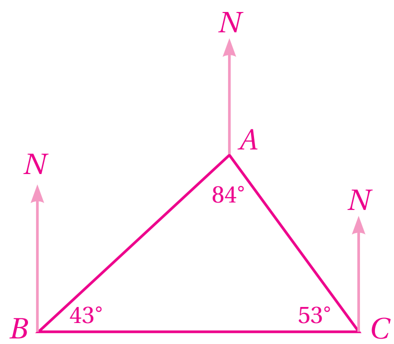
قياس الزاوية NCA هو: $90° - 53° = 37°$

قياس الزاوية NAC هو: $180° - 37° = 143°$

إذن:

اتجاه C من A هو: $143°$

اتجاه C من B هو: $090°$



21) بعد أنْ قطعت السفينة مســافة 57 km في اتجاه الشمال تحوَّلت عند Q إلى اتجاه $045°$ حتى وصلت الموقع S.

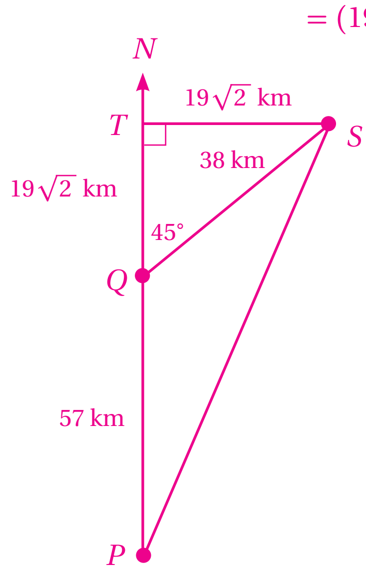
لإيجاد PS، يُرسَم عمود من S إلى امتداد PQ، فينتج مثلثان قائما الزاوية، هما: STQ، و STP.

في المثلــث STQ، الضلعــان TS, TQ متطابقــان، وكلٌّ منهما يساوي:

$$SQ \times \sin 45° = 38 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 19\sqrt{2} \text{ km}$$

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث STP، فإنَّ:

$$(SP)^2 = (ST)^2 + (PT)^2$$
$$= (19\sqrt{2})^2 + (19\sqrt{2} + 57)^2$$
$$= 722 + 7034.1866$$
$$= 7756.1866$$
$$SP = \sqrt{7756.1866}$$
$$\approx 88.1 \text{ km}$$



22) لإيجاد اتجاه S من P، يتعيَّن إيجــاد قياس الزاوية QPS، وليكن هذا القياس x.

من المثلث قائم الزاوية STP، يُلاحَظ أنَّ:

$$\tan x = \frac{19\sqrt{2}}{19\sqrt{2} + 57} = 0.3204$$
$$x = \tan^{-1}(0.3204) \approx 18°$$

إذن، اتجاه S من P هو: $018°$ مُقرَّبًا إلى أقرب درجة.

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 3:

11) إيجاد الحالات الثلاث بحسب قانون جيوب التمام:

$i)\ \theta = 120$

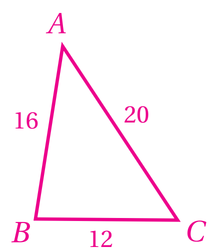
$ii)\ \theta = 38.2$

$iii)\ \theta = 21.8$

إذن، أصغر زاوية هي: 21.8 المقابلة للضلع $3a$.

إجابة بند (أتحقق من فهمي 2) الدرس 3:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$= \frac{12^2 + 16^2 - 20^2}{2(12)(16)} = \frac{0}{384} = 0$$
$$B = \cos^{-1}(0) = 90°$$



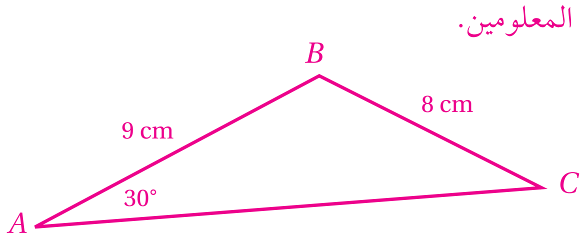
إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 4:

13) $(BD)^2 = (25)^2 + (73)^2 - 2(25 \times 73 \times \cos 65°) = 4411.443$

$BD = \sqrt{4411.443} = 66.418$

إذن، طول BD مُقرَّبًا إلى أقرب متر هو: 66 m

20) أخطأت نور حيــن جعلت الزاويــة A محصورة بيــن الضلعين المعلومين.



الزاوية المحصورة بين الضلعين المعلومين هي B:

$$\frac{\sin C}{9} = \frac{\sin 30°}{8}$$
$$C = 34.2°$$
$$B = 115.8°$$

مساحة المثلث هي:

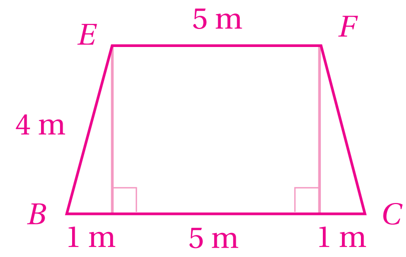
$$\frac{1}{2}\times 9\times 8\times \sin 115.8° \approx 32.4\ cm^2$$

وقد تكون $C = 145.8°$ (مكملة $34.2°$)، عندئذٍ تكون $B = 4.2°$، ومساحة المثلث:

$$\frac{1}{2}\times 9\times 8\times \sin 4.2° \approx 2.64\ cm^2$$

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 5:

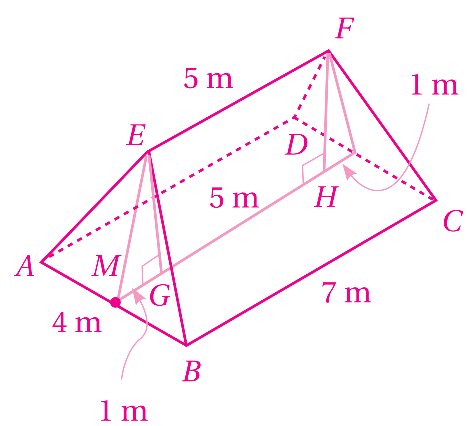
8) قياس الزاوية EBC هو: $\cos^{-1}(\frac{1}{4}) = 75.5°$



9) الزاوية بين EM والقاعدة $ABCD$ هي الزاوية EMG، وإذا أُنزِل عمود من F، وE إلى القاعدة تكوَّن المستطيل $EGHF$ ومثلثان، طول قاعدة كلٍّ منهما $1\ m$.

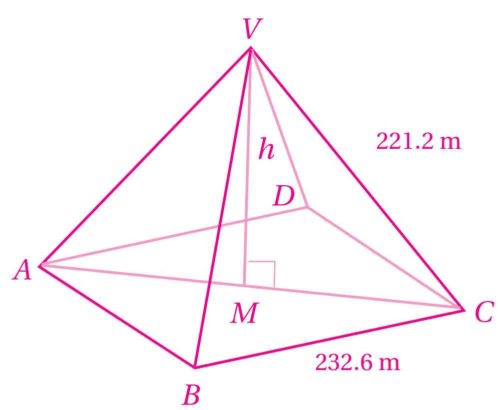
إذن، جيب تمام الزاوية EMG هو: $\frac{MG}{EM} = \frac{1}{3.46}$،

وقياسها هو: $\cos^{-1}(\frac{1}{3.46}) = 73.2°$



15) $(AC)^2 = 232.6^2 + 232.6^2 = 2(232.6)^2$

$AC = 232.6\sqrt{2}$



النقطة M هي منتصف AC؛ أيْ إنَّ:

$$AM = \frac{1}{2}(232.6\sqrt{2}) = 116.3\sqrt{2}$$

$$h^2 = 221.2^2 - (116.3\sqrt{2})^2$$

$$= 21878.06$$

$$h = 147.9\ m$$

16) ليس صحيحًا؛ لأنَّ $\tan 15° \neq \frac{1}{2}\tan 30°$

ارتفاع الشجرة فوق مستوى عيني هدى هو: $14\tan 30°$

إذا كانت زاوية ارتفاع الشجرة بالنسبة إلى جمال هي θ، فإنَّ:

$$\tan\theta = \frac{14\tan 30°}{28}$$

$$= \frac{8.083}{28}$$

$$\theta = \tan^{-1}(8.083 \div 28) \approx 16.1°$$

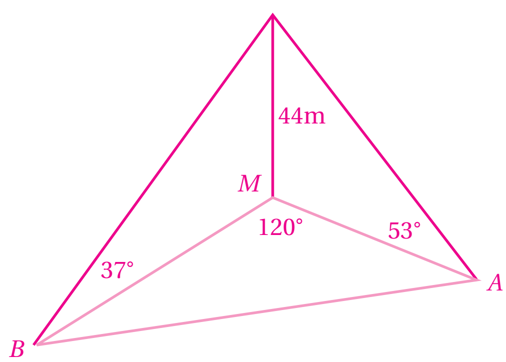
17) $MB = 44 \div \tan 37° = 58.39$

$AM = 44 \div \tan 53° = 33.16$

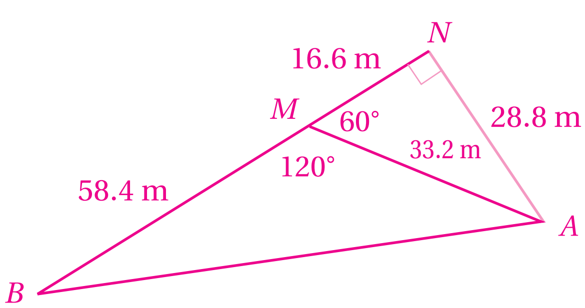
$(AB)^2 = (58.39)^2 + (33.16)^2 - 2\times 58.39\times 33.16\cos 120°$

$= 6445.1901$

$AB \approx 80.3\ m$



حل آخر للسؤال 17 : بعد إيجاد MA، وMB، يستعمل الطلبة قانون جيوب التمام لإيجاد المسافة بين القاربين. ويمكن إيجاد هذه المسافة باعتماد المثلثات القائمة فقط كما في الشكل الآتي:



$(AB)^2 = 75^2 + 28.8^2 = 6454.44$

$AB \approx 80.3\ m$

إجابات أسئلة بند (أتحقَّق من فهمي)، الدرس 5:

مثال 2

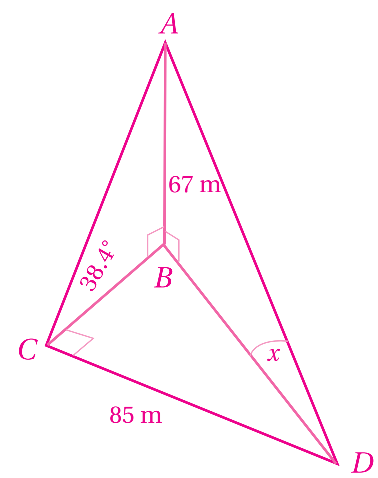
$$CB = \frac{67}{\tan 38.4°} = 84.5 \text{ m}$$

$$BD = \sqrt{85^2 + 84.5^2} = 119.9 \text{ m}$$

لتكن زاوية ارتفاع قمة المئذنة من النقطة D هي x، إذن:

$$\tan x = \frac{67}{119.9} \approx 0.559$$

$$x = \tan^{-1}(0.559) = 29.2°$$



مثال 3

من المثلث HPA، يَتبيَّن أنَّ:

$$AP = \frac{600}{\tan 40°} \approx 715.1 \text{ m}$$

ومن المثلث HPB، يَتبيَّن أنَّ:

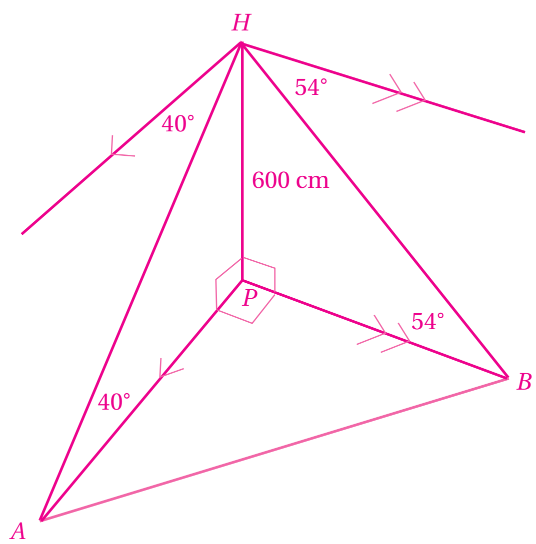
$$BP = \frac{600}{\tan 54°} \approx 435.9 \text{ m}$$

$$(AB)^2 = 715.1^2 + 435.9^2$$

$$= 701376.82$$

$$AB \approx 837.5 \text{ m}$$

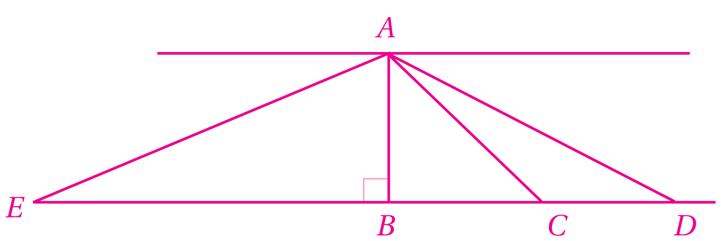
إذن، المسافة بين السفينتين هي: 837.5 m تقريبًا.



إجابات أسئلة اختبار نهاية الوحدة:

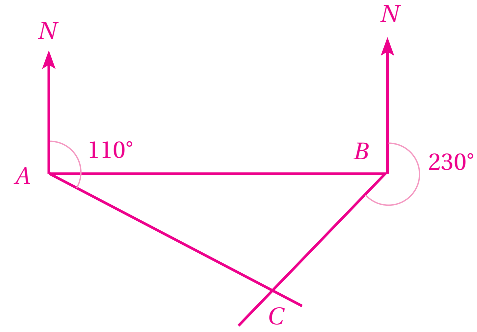
26) الشيء الذي زاوية انخفاضه أكبر هو الأقرب إلى الناظر.

في الرسم الآتي، النقطة B هي أقرب إلى النقطة A من بين النقاط: B، وC، وD، وE، وزاوية انخفاضها هي الكبرى.

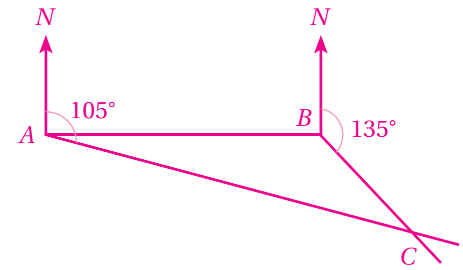


إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 1:

5) تقع النقطة C عند تقاطع الاتجاه $110°$ من A، والاتجاه $230°$ من B.



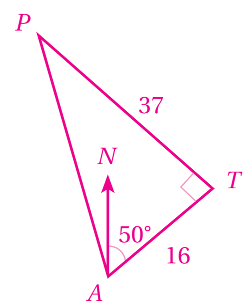
6) تقع النقطة C عند تقاطع الاتجاه $105°$ من A، والاتجاه $135°$ من B.



7) $m\angle PAT = \tan^{-1}\left(\frac{37}{16}\right) \approx 66.6°$

$m\angle PAN = 66.6° - 50° = 16.6°$

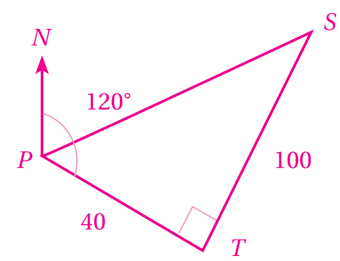
اتجاه الطائرة P من المطار A يساوي قياس الزاوية المنعكسة NAP، وهو: $360° - 16.6° = 343.4°$



8) $m\angle SPT = \tan^{-1}\left(\frac{100}{40}\right) \approx 68.2°$

$\Rightarrow m\angle NPS = 120° - 68.2 = 51.8°$

اتجاه السفينة من الميناء الآن هو: $051.8°$

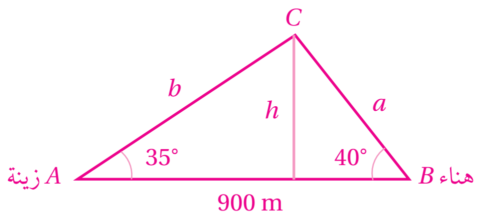


إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 2:

11) $C = 105°$

$\frac{b}{\sin 40°} = \frac{900}{\sin 105°} \Rightarrow b \approx 598.9$

$\sin 35° = \frac{h}{598.9} \Rightarrow h \approx 343.5$

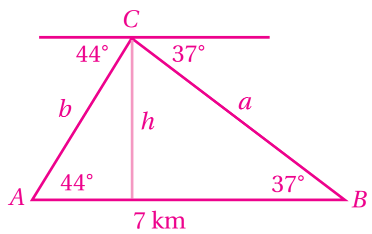


إذن، ارتفاع الطائرة هو: 343.5 m تقريبًا.

12) $C = 99°$

$\frac{b}{\sin 37°} = \frac{7}{\sin 99°} \Rightarrow b \approx 4.27$

$\sin 44° = \frac{h}{4.27} \Rightarrow h \approx 2.97$

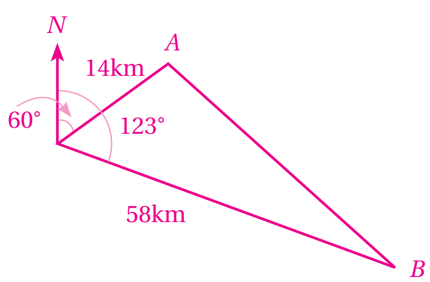


إذن، ارتفاع الطائرة هو: 2.97 km تقريبًا.

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 3:

16) الزاوية بين خطي سير القاربين هي: $123° - 60° = 63°$

المسافة التي قطعها الأوَّل هي: 14km. المسافة التي قطعها الثاني هي: 58 km



$(AB)^2 = 14^2 + 58^2 - 2 \times 14 \times 58 \times \cos 63°$

$\Rightarrow AB \approx 53.1 \text{ km}$

17) الزاوية بين خطي سير السفينتين هي:

$130° - 75° = 55°$

المســافة التي قطعتها الســفينة الأولى من الســاعة 9 صباحًا إلى الساعة 11 صباحًا هي: 40 km

المسافة التي قطعتها السفينة الثانية من الساعة 9 صباحًا إلى الساعة 11 صباحًا هي: 50 km

لتكن المسافة بين السفينتين عندئذٍ d:

$$d^2 = 40^2 + 50^2 - 2 \times 40 \times 50 \times \cos 55° \Rightarrow d \approx 42.5 \text{ km}$$

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 4:

9) $QR = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10$

مساحة المنطقة المظللة= مساحة نصف الدائرة – مساحة المثلث القائم PQR

$$= 0.5 \times 13^2 \times \pi - 0.5 \times 24 \times 10 \approx 145.5$$

10) قياس زاوية رأس المثلث هو: $77.4°$ تقريبًا.

مساحة النافذة = مساحة المثلث + مساحة المستطيل

$$= 0.5 \times 1.6 \times 1.6 \times \sin 77.4° + 2 \times 1.2 \approx 3.65$$

11) $\dfrac{25}{\sin M} = \dfrac{18}{\sin 40°} \Rightarrow M \approx 63.2°$

$N \approx 76.8°$

$K = 0.5 \times 25 \times 18 \times \sin 76.8° \approx 219$

12) $\dfrac{32.6}{\sin 93°} = \dfrac{24.1}{\sin C} \Rightarrow C \approx 47.6°$

$A \approx 39.4°$

$K = 0.5 \times 32.6 \times 24.1 \times \sin 39.4° \approx 249.3$

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 5:

1) $AC = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$

$AG = \sqrt{74 + 3^2} = \sqrt{83} \approx 9.1$

2) $m\angle GAC = \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{74}}\right) \approx 19.2°$

3) $RP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

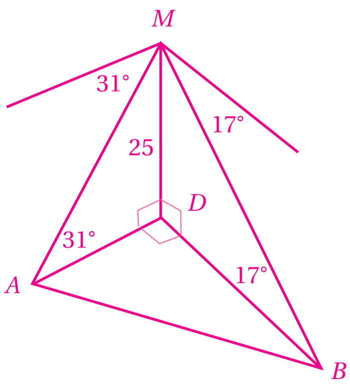
$NP = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

4) $m\angle NPR = \tan^{-1}\left(\dfrac{12}{5}\right) \approx 67.4$

5) $BD = \dfrac{25}{\tan 17°} \approx 81.8$

$AD = \dfrac{25}{\tan 31°} \approx 41.6$

$AB = \sqrt{81.8^2 + 41.6^2} = 91.8 \text{ m}$



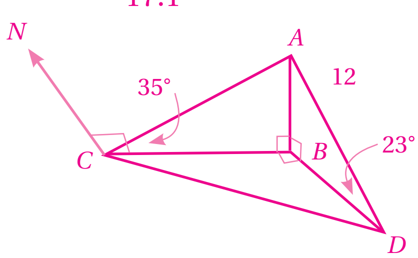
6) $CB = \dfrac{12}{\tan 35°} \approx 17.1 \text{ m};$

$DB = \dfrac{12}{\tan 23°} \approx 28.3 \text{ m}$

$CD = \sqrt{17.1^2 + 28.3^2} = 33.1 \text{ m}$

اتجاه D من C يســاوي قياس الزاوية بين خط الشــمال $\overrightarrow{CN}$ والقطعة $\overline{CD}$، وهو: $m\angle NCB + m\angle BCD$

$$= 90° + \tan^{-1}\left(\frac{28.3}{17.1}\right) \approx 90° + 58.9° = 148.9°$$



7) $BC = \dfrac{150}{\tan 50°} \approx 125.9 \text{ m};$

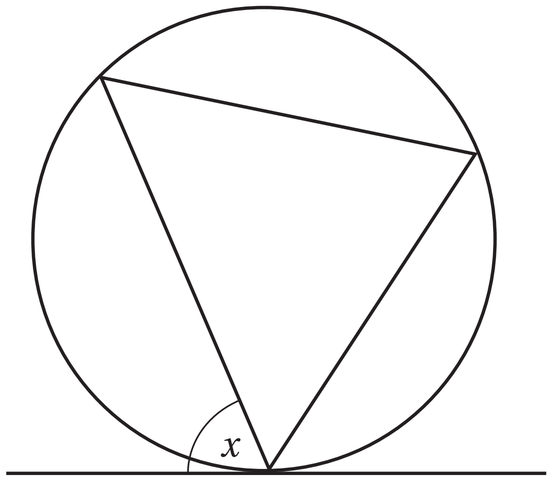
$AB = \sqrt{125.9^2 + 300^2} \approx 325.3 \text{ m}$

اتجاه A من B يســاوي قياس الزاوية CBA؛ لأنَّ BC هو خط الشمال المار بـ B، وهي: $\tan^{-1}\left(\dfrac{300}{125.9}\right) \approx 67.2°$

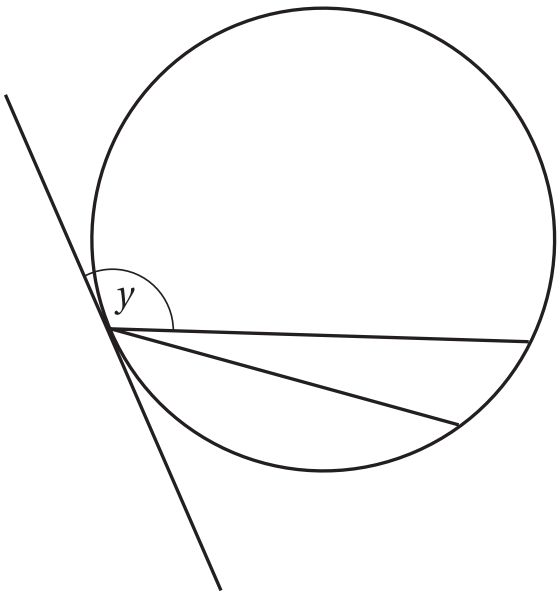
إذن، الاتجاه المطلوب هو: $067.2°$

أوراق المصادر

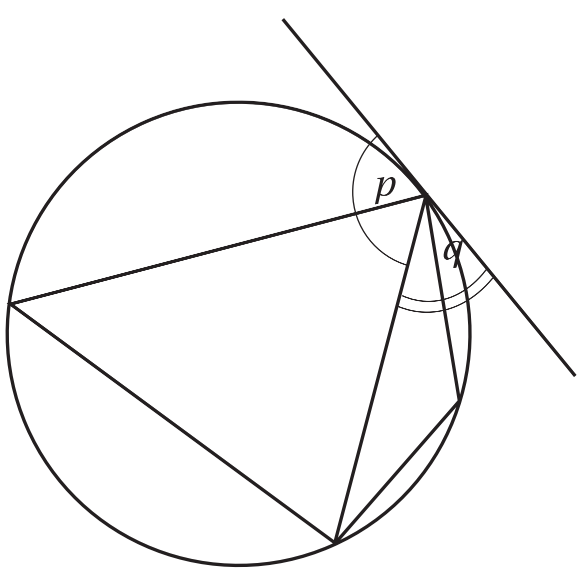
ورقة المصادر 1: الزوايا المماسية



الشكل (1)



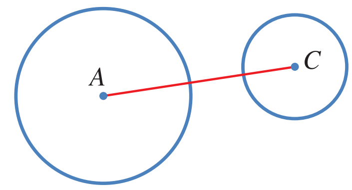
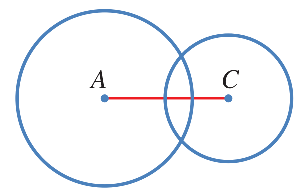
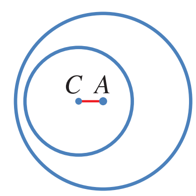
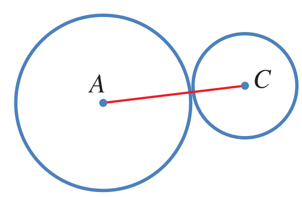
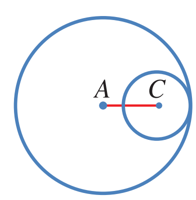
الشكل (2)



الشكل (3)

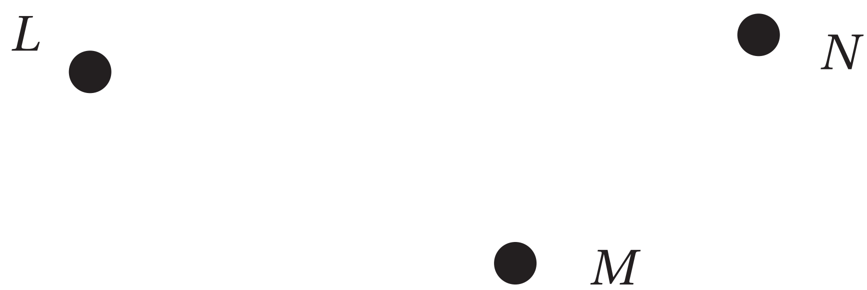
ورقة المصادر 2: الدوائر المتماسة

أُقارنُ بينَ قيمِ $r_1 + r_2$، وَ $r_2 - r_1$ وَ AC، ثمَّ أستنتجُ العلاقةَ بينَها وبينَ وضعِ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما.

وضعُ الدائرتيْنِ	r_1	r_2	AC	$r_1 - r_2$	$r_1 + r_2$	الاستنتاجُ
						
						
						
						
						

ورقة المصادر 3: الاتجاه من الشمال

أعتمدُ النقاطَ الآتيةَ في الإجابةِ عنِ الأسئلةِ التي تلي:



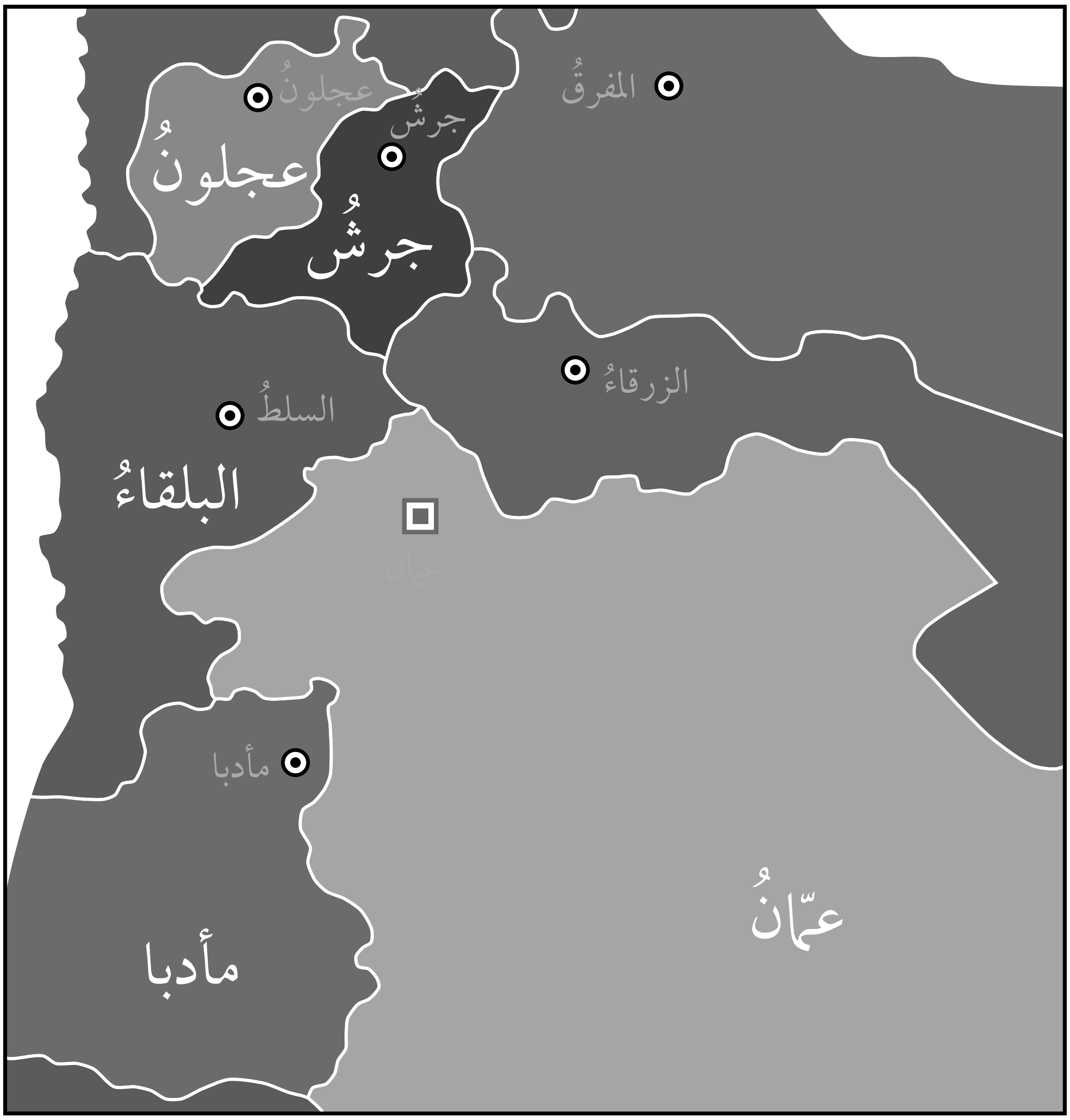
1) أجدُ اتجاهَ النقطةِ M منَ النقطةِ L.

2) أجدُ اتجاهَ النقطةِ M منَ النقطةِ N.

3) أجدُ اتجاهَ النقطةِ N منَ النقطةِ M.

ورقة المصادر 4: الاتجاه من الشمال والخريطة

مُعتمِدًا الخريطةَ الآتيةَ، أُجيبُ عنِ الأسئلةِ التي تليها:



4) أجدُ اتجاهَ مدينةِ السلطِ منْ مدينةِ عمّانَ.

5) أجدُ اتجاهَ مدينةِ عمّانَ منْ مدينةِ مأدبا.

6) أختارُ منَ الخريطةِ إحدى المدينتينِ: *A*، أو *B*، ثمَّ أجدُ اتجاهَ *A* منْ *B*، واتجاهَ *B* منْ *A*.